

ELEMENTOS DE TERMODINÁMICA



Luz María García Cruz
Héctor Martín Luna García
Tomás David Navarrete González
José Ángel Rocha Martínez

ELEMENTOS DE TERMODINÁMICA

ELEMENTOS DE TERMODINÁMICA

Este material fue dictaminado y aprobado para su publicación por el Consejo Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Azcapotzalco de la UAM, en su sesión del día 3 de julio de 2007.

#217566

C.B. 2893209

ELEMENTOS DE TERMODINÁMICA

Luz María García Cruz
Héctor Martín Luna García
Tomás David Navarrete González
José Ángel Rocha Martínez



2893209



División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO

RECTORA
MTRA. PALOMA IBÁÑEZ VILLALOBOS

SECRETARIO
ING. DARÍO EDUARDO GUAYCOCHEA GUGLIELMI

COORDINADOR GENERAL DE DESARROLLO ACADÉMICO
DR. LUIS SOTO WALLS

COORDINADORA DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA
MTRA. MARÍA ITZEL SAINZ GONZÁLEZ

JEFE DE LA SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES
LIC. FRANCISCO RAMÍREZ TREVIÑO

UAM
PC 311
E 5.454

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO
AV. SAN PABLO 180
COL. REYNOSA TAMAULIPAS
DEL AZCAPOTZALCO
C. P. 02200
MÉXICO, D. F.

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO

LUZ MARÍA GARCÍA CRUZ
HÉCTOR MARTÍN LUNA GARCÍA
TOMÁS DAVID NAVARRETE GONZÁLEZ
JOSÉ ÁNGEL ROCHA MARTÍNEZ

ELEMENTOS DE TERMODINÁMICA
ISBN: 970-31-0241-7

DISEÑO DE PORTADA:
MODESTO SERRANO RAMÍREZ

1ª. EDICIÓN. 2008
1ª. REIMPRESIÓN. 2010

IMPRESO EN MÉXICO

PRESENTACIÓN

Este texto tiene por objeto auxiliar al estudiante en el curso de Termodinámica que se ubica como obligatorio en el tronco general de los planes de estudio de las licenciaturas en ingeniería, que se imparten en la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco.

El texto está dividido en tres unidades y cada unidad en dos secciones. La primera sección incluye la teoría, en tanto que en la segunda se resuelven, a detalle, los problemas correspondientes a las tres primeras secciones del texto Selección de Problemas de Termodinámica¹.

Los autores desean que el presente material sea de utilidad tanto para los alumnos de esta unidad de enseñanza aprendizaje (U.E.A.) como para los profesores que la imparten; con la garantía de que se apega fielmente al contenido y nivel que se describe en el programa oficial de la materia y con el convencimiento de que la mejor selección bibliográfica la determina cada profesor que imparte la U.E.A.

Luz María García Cruz

Héctor Martín Luna García

Tomás David Navarrete González

José Ángel Rocha Martínez

1. Selección de Problemas de Termodinámica

Luz María García Cruz

Ed. División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Ciencias Básicas

Universidad Autónoma Metropolitana- Azcapotzalco

Sexta reimpresión, 2005.

Índice

Unidad I

ECUACIÓN DE ESTADO, PROCESOS POLITRÓPICOS Y PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

1.1 Conceptos Fundamentales y la Ley Cero de la Termodinámica.....	2
1.2 Ecuación de Estado de Gas Ideal.....	6
1.3 Ecuación de Procesos Politrópicos y su representación en el plano VP	7
1.4 Calor, Trabajo, Energía Interna y la Primera Ley de la Termodinámica.....	12
1.5 Expansión Libre de un Gas Ideal	13
1.6 Definición Termodinámica del Trabajo.....	15
1.7 Resumen de la Unidad.....	17
1.8 Problemas Resueltos Modelo de Primera Evaluación Parcial.....	18

Unidad II

LA VARIABLE ENTROPÍA. PROCESOS REVERSIBLES Y CICLOS

2.1 La Variable Entropía.....	79
2.2 Definición de Calor.....	81
2.3 Ecuaciones para el cálculo de la variación en la Entropía.....	82
2.4 Procesos Politrópicos y su representación en el plano ST	83
2.5 Ciclos Reversibles. Representación en los planos VP y ST	89
2.6 El Ciclo de Carnot.....	92
2.7 Resumen de la Unidad.....	95
2.8 Problemas Resueltos Modelo de Segunda Evaluación Parcial.....	96

Unidad III

ENTROPÍA Y ESPONTANEIDAD, SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

3.1 Procesos Espontáneos, aumento en la entropía del universo y Segunda Ley de la Termodinámica.....	197
3.1.1 Expansión Libre de un gas ideal.....	202

3.1.2 Intercambio de energía calorífica entre dos gases ideales aislados de los alrededores.....	204
3.1.3 Intercambio de energía calorífica entre un gas ideal y un almacén térmico.....	208
3.2 Máquina Térmica y Refrigerador.....	210
3.3 Resumen de la Unidad.....	215
3.4 Problemas Resueltos Modelo de Tercera Evaluación Parcial.....	216
Apéndice I.....	299
Bibliografía.....	300

UNIDAD I

ECUACIÓN DE ESTADO, PROCESOS POLITRÓPICOS Y PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Contenido

- 1.1 Conceptos Fundamentales y la Ley Cero de la Termodinámica.
- 1.2 Ecuación de Estado de Gas Ideal.
- 1.3 Ecuación de Procesos Politrópicos y su representación en el plano VP .
- 1.4 Calor, Trabajo, Energía Interna y la Primera Ley de la Termodinámica.
- 1.5 Expansión Libre de un Gas Ideal.
- 1.6 Definición Termodinámica del Trabajo.
- 1.7 Resumen de la Unidad.
- 1.8 Problemas Resueltos.

1.1 Conceptos Fundamentales y la Ley Cero de la Termodinámica

La parte del universo físico cuyo comportamiento nos interesa estudiar recibe el nombre de **sistema**. Aquellas partes de este universo que tienen alguna influencia sobre el sistema son sus **alrededores**. La **frontera** del sistema es la superficie que lo separa de sus alrededores, la cual puede ser imaginaria o real, en cuyo caso se denomina **pared**.

Las propiedades macroscópicas del sistema que emplearemos para describirlo son: la masa m , el volumen V que ocupa, su presión P y su temperatura T . Se les llama también **variables** termodinámicas. El **estado** del sistema está especificado por los valores que toman las variables termodinámicas en todo punto del espacio que ocupa el sistema. Cuando estos valores no cambian en el tiempo se dice que el sistema se encuentra en un **estado de equilibrio**.

Limitaremos el estudio a los **sistemas cerrados**, es decir, sistemas que no intercambian masa con los alrededores; por lo que el sistema podrá variar su estado de equilibrio ya sea interactuando en forma mecánica, térmica o con ambos tipos de interacción.

Interacción mecánica: Ocurre cuando la presión del sistema es diferente a la presión que los alrededores ejercen sobre él. Habrá un intercambio de energía mecánica entre el sistema y los alrededores que se manifiesta por la realización de un trabajo, W y podrá observarse una variación en el volumen del sistema. Cuando el volumen aumenta, el sistema efectuará un trabajo sobre los alrededores ($W > 0$); cuando el volumen disminuye, los alrededores efectuarán un trabajo sobre el sistema ($W < 0$).

Interacción térmica: Se lleva a cabo cuando la temperatura del sistema es diferente a la temperatura de los alrededores. En este caso será posible un intercambio de energía en forma de calor, Q . Esta forma es distinta a la mecánica ya que puede efectuarse sin que cambie el volumen del sistema. Cuando el sistema recibe calor de los alrededores ($Q > 0$), si el sistema cede calor a los alrededores ($Q < 0$).

Teniendo en cuenta estas dos formas de interacción entre el sistema y los alrededores se clasifican cuatro tipos de paredes: en base a la interacción mecánica, las **paredes** pueden ser **rígidas** (el sistema está aislado mecánicamente y su volumen permanece constante) o **móviles** (hay variación en el volumen e intercambio de energía en forma de trabajo). En base a la interacción térmica las **paredes** se clasifican en **adiabáticas** (el sistema está aislado térmicamente) o **diatérmicas** (el sistema intercambia calor con los alrededores).

Además, combinando por parejas los tipos de paredes que no son mutuamente exclusivos, las clasificaremos en:

Rígidas adiabáticas: el sistema se encuentra aislado mecánicamente y térmicamente. Se dice, simplemente, que el sistema está aislado de los alrededores.

Móviles adiabáticas: el sistema podrá intercambiar energía en forma de trabajo, pero se encuentra aislado térmicamente.

Rígidas diatérmicas: el sistema podrá intercambiar energía en forma de calor, pero se encuentra aislado mecánicamente.

Móviles diatérmicas: el sistema puede intercambiar energía tanto en forma de trabajo como en forma de calor con los alrededores.

Cuando el sistema pasa de un estado inicial de equilibrio a un estado final también de equilibrio se dice que ha ocurrido un **proceso**, es decir, un proceso es equivalente a un cambio de estado. Existe una distinción entre los procesos; si el proceso se efectúa de tal manera que en todo momento el sistema se encuentra alejado de un estado de equilibrio solamente de manera infinitesimal, el proceso recibe el nombre de **proceso cuasiestático**.

La trayectoria seguida por el sistema durante un proceso de tal naturaleza se puede representar por una sucesión de estados de equilibrio y sólo en este caso es posible representar al proceso mediante una línea continua que une los estados inicial y final. Si existe algún alejamiento finito de un estado de equilibrio, el proceso es **no cuasiestático**.

Un proceso cuasiestático es un *proceso ideal*. Se puede realizar de manera aproximada si el cambio de estado se lleva a cabo muy lentamente. Sin embargo, ningún proceso real es cuasiestático, puesto que se efectúa acompañado de diferencias finitas de presión, temperatura, etc., entre el sistema y los alrededores. Se dice que un **proceso es reversible** si

una vez que se ha efectuado resulta posible, de alguna manera, hacer volver al sistema y a sus alrededores exactamente a los mismos estados que tenían antes del proceso; en caso contrario el **proceso** es **irreversible**. *Todos los procesos reales son irreversibles*. La irreversibilidad aparece cuando hay ausencia de equilibrio durante el proceso puesto que, como se mencionó anteriormente, se efectúa acompañado de diferencias finitas de presión, temperatura, etc., entre el sistema y los alrededores. Más adelante se verá que el grado de irreversibilidad se puede cuantificar mediante el empleo de la variable entropía.

Finalmente, un proceso o cambio de estado puede incluir o no un cambio de fase. La **fase** se define como un estado de la materia completamente homogéneo y uniforme; así por ejemplo, aunque el agua líquida y el hielo (agua sólida) o el agua líquida y el vapor de agua tienen composición química idéntica (H_2O) no tienen la misma densidad, por lo que se consideran como dos fases diferentes. En este texto se limitará el estudio a sistemas en fase gaseosa que al pasar de un estado de equilibrio a otro no experimentan cambio de fase.

Se dice que ha ocurrido un **ciclo** cuando después de que el sistema realiza varios procesos, regresa finalmente al estado inicial. Como resultado de un ciclo, las variables termodinámicas que caracterizan al sistema recuperan sus valores originales y el cambio neto o total en cada una de ellas es igual a cero.

Por definición, dos sistemas que se encuentran en **equilibrio mecánico** tienen la misma presión. Experimentalmente se encuentra que si dos sistemas en equilibrio tienen la misma presión, permanecerán en equilibrio al ponerlos en contacto mecánico. Asimismo, por definición dos sistemas que se encuentran en **equilibrio térmico** tienen la misma temperatura y, experimentalmente se encuentra que si dos sistemas en equilibrio tienen la misma temperatura, permanecerán en equilibrio al ponerlos en contacto térmico. Esto último expresado recibe el nombre de la **Ley Cero de la Termodinámica**. Es usual enunciar esta ley de la siguiente manera: “Si un sistema *C* está inicialmente en equilibrio térmico con el sistema *A* y con el sistema *B*, entonces los sistemas *A* y *B* están en equilibrio térmico entre sí”.

En otras palabras, si dos sistemas, inicialmente a diferente temperatura, interactúan térmicamente; intercambiarán energía en forma de calor (el cual de manera natural se transfiere del sistema de más alta temperatura al de menor temperatura) hasta que, al llegar al equilibrio, la temperatura final de cada uno de ellos es la misma; se dice que los sistemas están en equilibrio térmico.

Las variables presión y temperatura, mencionadas anteriormente poseen otra propiedad en común. Supongamos que un sistema en equilibrio se divide en varias partes, cada una de ellas conteniendo diferente masa. Obviamente que no se alterará ni la presión ni la temperatura de cada una de las porciones del sistema. Por esta razón a estas **variables** se les denomina **intensivas**; son independientes de la masa del sistema. Por el contrario, la suma de los volúmenes correspondientes a cada parte del sistema da como resultado el volumen total del mismo; esto es, que la variable volumen sí depende de la masa del sistema. Las variables que, como el volumen, si dependen de la masa del sistema son llamadas **variables extensivas**. La energía interna y la entropía son ejemplos de éstas.

En general, cuando dos sistemas se ponen en contacto mecánico se observa un cambio en sus presiones. Lo mismo ocurre con las temperaturas de dos sistemas que se ponen en contacto térmico. Este cambio es tanto menos perceptible cuanto mayor sea la cantidad de materia que contenga el sistema. Pensemos en el caso límite de un sistema de masa infinita (o de masa mucho más grande que la correspondiente al otro sistema con el que va a interactuar) que al ponerlo en contacto mecánico con este último no varía su presión, es decir, todos los sistemas que se pongan en contacto mecánico con él llegarán a tener la misma presión. A este sistema se le denomina **almacén mecánico**. De manera semejante, un sistema será un **almacén térmico** si todos los sistemas que se pongan en contacto térmico con él se encontrarán a la misma temperatura. En consecuencia, el almacén mecánico podrá ceder o aceptar una cantidad arbitraria de energía en forma de trabajo sin que varíe su presión, o sea, esta energía la cederá o aceptará a presión constante. El almacén térmico, por su parte, podrá ceder o aceptar una cantidad arbitraria de energía en forma de calor a temperatura constante.

1.2 Ecuación de Estado de Gas Ideal

Un gas ideal es un sistema en la fase de vapor tal que a presiones muy bajas y temperaturas muy altas, las variables presión, volumen y temperatura se comportan de tal manera que la cantidad $\frac{PV}{nT}$, donde n es el número de moles que contiene el gas, se aproxima a una constante, \bar{R} . Esta constante es llamada la constante universal de los gases cuyo valor numérico es $\bar{R} = 8.31 \frac{\text{kJ}}{(\text{kmol})(\text{K})}$.

Por definición, un gas que satisface la relación:

$$PV = n\bar{R}T \quad (1.2.1)$$

recibe el nombre de gas ideal y esta última relación algebraica es denominada la **Ecuación de Estado de gas ideal**.

Dado que n y la masa m del gas están relacionadas a través de la expresión $n = \frac{m}{M}$, siendo M el peso molecular del gas, entonces la ecuación de estado queda como $PV = m \frac{\bar{R}}{M} T$, o

$$PV = mRT \quad (1.2.2)$$

en donde $R = \frac{\bar{R}}{M}$ es la **constante del gas particular** en cuestión, puesto que cada gas está caracterizado por su valor de M . Por lo tanto, una manera de identificar a cada gas es a través de su valor de R ; dimensionalmente $[R] = \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$. En el Apéndice 1 se lista el valor de R correspondiente para algunos gases.

Como se observa de las ecuaciones (1.2.1) y (1.2.2) para las variables P , V y T que caracterizan al estado del gas ideal; si se fijan dos de ellas arbitrariamente, entonces el valor de la tercera queda determinado a través de la ecuación de estado.

Además, de la ecuación (1.2.2) se tiene que: $\frac{PV}{T} = mR = cte$,

por lo que,
$$d\left(\frac{PV}{T}\right) = d(cte);$$

esto es:
$$\frac{T(PdV + VdP) - PVdT}{T^2} = 0$$

Esta ecuación puede escribirse en la forma $PdV + VdP = \frac{PVdT}{T}$, la cual al dividir entre el producto PV conduce a la relación:

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} \quad (1.2.3)$$

que es conocida como la **Forma Diferencial de la Ecuación de Estado**.

1.3 Ecuación de Procesos Politrópicos y su representación en el plano

VP

Un **proceso politrópico** para un gas ideal es aquel que se puede describir mediante la relación,

$$PV^\kappa = cte \quad (1.3.1)$$

Esto es, la presión y el volumen de los estados inicial y final, para un sistema que realiza un proceso politrópico están relacionados según la ecuación:

$$P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa \quad (1.3.2)$$

en donde κ es el **exponente politrópico**, cuyo valor define la trayectoria seguida durante el proceso. En el diagrama de volumen contra presión VP , la pendiente de la curva que

representa al proceso (trayectoria), analíticamente es el valor de κ . Esta trayectoria puede corresponder a algún tipo de proceso que se realice en condiciones bien definidas, por ejemplo, manteniendo constante alguna de las variables termodinámicas. Algunos de los procesos politrópicos de interés se enlistan a continuación:

i) Si $\kappa = 0$, de la ecuación (1.3.1) se tiene que:

$$PV^0 = cte; \text{ esto es que } P = cte, \quad \text{o} \quad P_f = P_i$$

Lo que significa que este proceso se lleva a cabo manteniendo constante la presión. Se trata de un **proceso isobárico**, representado por una línea llamada **isóbara**. En el plano V - P , este proceso se representa por una recta paralela al eje del volumen.

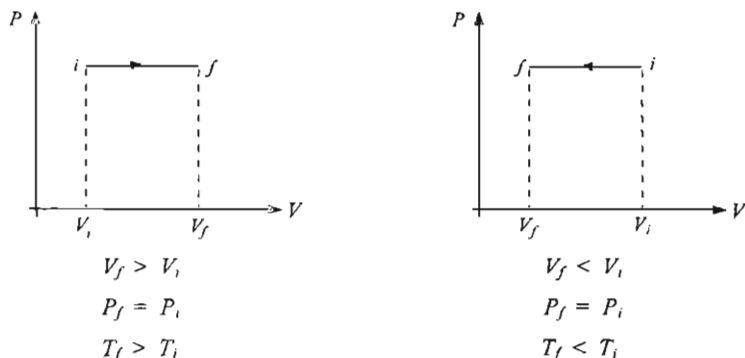


Figura 1

De la ecuación de estado se tiene que $\frac{mRT_f}{V_f} = P_f = \frac{mRT_i}{V_i} = P_i$; de donde $\frac{T_f}{T_i} = \frac{V_f}{V_i}$

ecuación de la cual se infiere la desigualdad correspondiente entre las temperaturas inicial y final mostradas en la Figura 1.

ii) El **proceso isocórico** se lleva a cabo manteniendo constante el volumen y es representado en el plano VP mediante la recta paralela al eje de la presión denominada **isócora**. Dado que esta recta tiene pendiente infinita y el exponente politrópico identifica a la pendiente de la curva en el plano VP , entonces este proceso está caracterizado por $\kappa = \infty$.

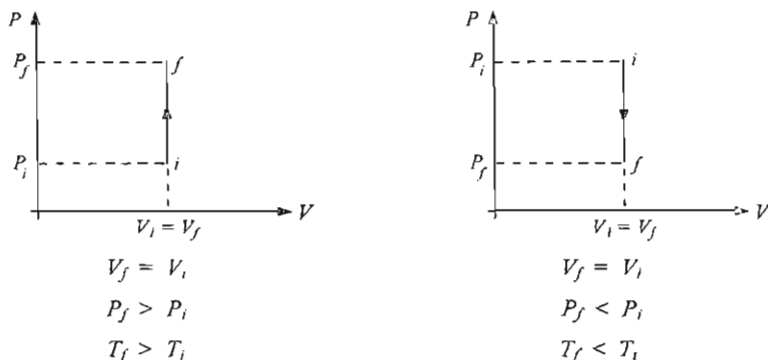


Figura 2

De la ecuación de estado se tiene que $\frac{mRT_f}{P_f} = V_f = \frac{mRT_i}{P_i} = V_i$; de donde $\frac{T_f}{T_i} = \frac{P_f}{P_i}$

ecuación de la cual se infiere la desigualdad correspondiente entre las temperaturas inicial y final mostradas en la Figura 2.

iii) Si $\kappa = 1$, de la ecuación (1.3.2) se tiene que,

$$P_f V_f = P_i V_i$$

Mediante la ecuación de estado se obtiene $T = \frac{PV}{mR}$ por lo que, si la temperatura es

constante $\frac{P_f V_f}{mR} = T_f = \frac{P_i V_i}{mR} = T_i$; de donde obtenemos nuevamente la ecuación

$P_f V_f = P_i V_i$. Concluimos entonces que cuando $\kappa = 1$, la variable temperatura es la que se mantiene constante. A este **proceso** se le llama **isotérmico** y se representa por una curva denominada **isoterma**.

De la ecuación $PV = cte$ resulta que $P = \frac{cte}{V}$, que es la ecuación de una curva tipo hipérbola en el plano VP , como se ilustra en la Figura 3.

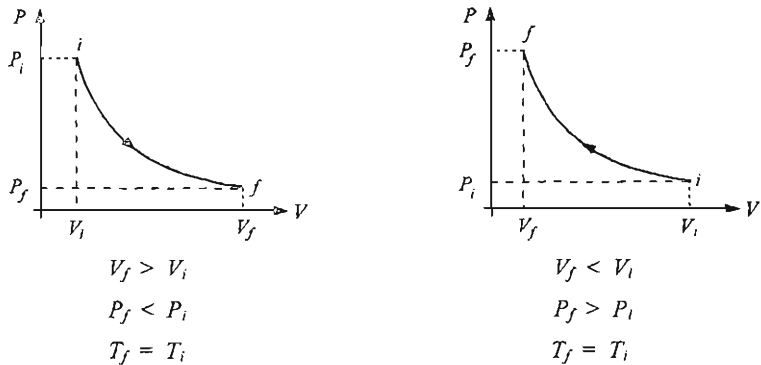


Figura 3

iv) Si $\kappa > 1$, de la ecuación (1.3.1) resulta

$$PV^\kappa = cte ; \text{ esto es que } P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa \quad \text{ó} \quad P = \frac{cte}{V^\kappa}$$

Esta última ecuación corresponde a la curva tipo hipérbola ilustrada en el plano VP . En este proceso ninguna de las variables P , V ó T se mantiene constante y no recibe ningún nombre en especial.

En el caso particular en el que $\kappa = \frac{C_p}{C_v} \equiv \gamma > 1$, se tiene el **proceso isoentrópico** ó **isentrópico**, esto es a entropía constante; y dado que en este proceso no hay intercambio de energía en forma de calor con los alrededores es conocido también como **proceso adiabático** ($Q = 0$).

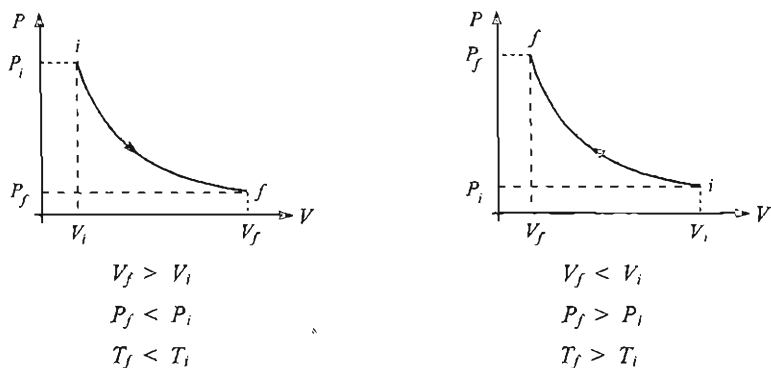


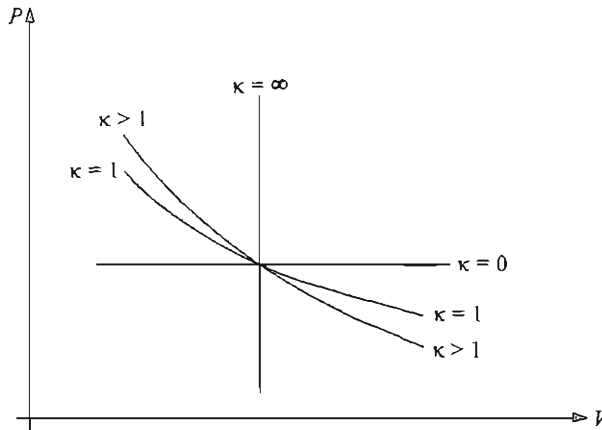
Figura 4

Combinando la ecuación $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$ con la de estado de gas ideal $PV = mRT$ se obtiene la expresión correspondiente a la relación entre las variables temperatura-volumen y temperatura-presión en función del exponente politrópico κ

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\kappa-1} = \left(\frac{P_f}{P_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (1.3.3)$$

Relación de la cual se infiere la desigualdad correspondiente a la temperatura en los estados inicial y final ilustradas en la Figura 4.

Se representa finalmente a los cuatro procesos en el plano VP mismo que muestra la diferencia en pendientes para el proceso isotérmico y el proceso con $\kappa > 1$.



1.4 Calor, Trabajo, Energía Interna y la Primera Ley de la Termodinámica

El sistema termodinámico tiene asociado una energía propia, denominada **Energía Interna**, designada por el símbolo U ; que es susceptible de aumento o disminución, dependiendo de la forma de interacción entre el sistema y los alrededores. Lo que interesa es determinar el valor correspondiente al cambio en la energía interna, $\Delta U = U_f - U_i$, para lo cual se recurre a la Ley de Conservación de la Energía.

La *interacción únicamente térmica* del sistema con los alrededores se manifiesta por el intercambio de energía en forma de calor, este calor intercambiado da como resultado la variación en la energía interna del sistema; la cual, de acuerdo con la ley de conservación de la energía es:

$$\Delta U = Q \quad (1.4.1)$$

Esta cantidad será **positiva** si el sistema **absorbe** el calor y **negativa** en el caso contrario.

Cuando el sistema *interactúa solamente en forma mecánica* con los alrededores, interacción que se manifiesta por la realización de un trabajo, la energía interna del sistema variará; misma que, de acuerdo con la ley de conservación de la energía es igual a menos el trabajo intercambiado entre ambos (el signo menos se introduce debido a la convención de signos mencionada en la sección 1.1); esto es que:

$$\Delta U = - W \quad (1.4.2)$$

Esta cantidad será **positiva** si los alrededores realizan trabajo sobre el sistema, o bien **negativa** cuando el sistema es el que realiza trabajo sobre los alrededores.

En el caso general en el que el sistema, contenido en un recipiente de paredes móviles diatérmicas, intercambie energía mecánica y calorífica con los alrededores; la ley de conservación de la energía establece que la variación en la energía interna del sistema es

$$\Delta U = Q - W \quad (1.4.3)$$

La ecuación (1.4.3) es la expresión cuantitativa de la **Primera Ley de la Termodinámica**.

La forma diferencial de esta ecuación se expresa

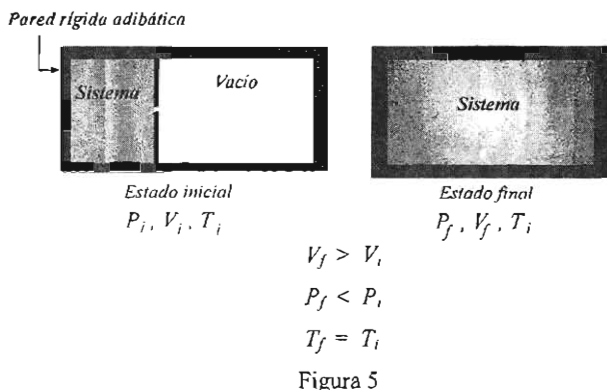
$$dU = d'Q - d'W \quad (1.4.4)$$

en donde el símbolo d' se ha usado para representar a una diferencial inexacta, puesto que el calor y el trabajo son cantidades que no solamente dependen de los estados inicial y final sino también del proceso; esto es de la trayectoria que une a esos dos estados. En otras palabras, Q y W no son variables termodinámicas, en tanto que la energía interna sí lo es.

1.5 Expansión Libre de un gas ideal

Al fenómeno de difusión del gas de una región a otra sin que se efectúe un trabajo sobre éste, se le denomina expansión libre. Se define al gas perfecto como aquel cuya

temperatura no varía al expandirse libremente dentro de un recipiente de paredes rígidas adiabáticas, como se muestra en la Figura 5.



Dado que en esta expansión libre los alrededores no han efectuado trabajo sobre el sistema, ni tampoco han transferido energía en forma de calor, la energía interna del gas deberá haber permanecido constante. Puesto que el volumen del gas aumentó, se infiere que la energía interna de un gas perfecto deberá ser independiente del volumen que ocupe.

Considerando que U es una función de la presión, el volumen y la temperatura del gas: $U = U(P, V, T)$. Por la ecuación de estado, se puede expresar la presión en función de la temperatura y el volumen: $P = P(V, T)$. Resultará, entonces, que la energía interna dependerá sólo de V y T : $U = U(V, T)$; pero para un gas perfecto, la energía interna es independiente del volumen, por lo que sólo podrá depender de la temperatura: $U = U(T)$.

Para un gas ideal y perfecto, puesto que la energía interna sólo depende de la temperatura, el cambio en la energía interna está dado como

$$dU = C_v' dT \quad (1.5.1)$$

$$dU = mC_v dT \quad (1.5.2)$$

cuando la temperatura ha variado en dT . Siendo $[C_v'] = \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$ la capacidad calorífica y

$[C_v] = \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$ el calor específico a volumen constante, respectivamente; en donde

$$C_v = \frac{C_v'}{m} \quad (1.5.3)$$

De aquí que al integrar las expresiones (1.5.1) y (1.5.2) entre los estados inicial y final resulta que

$$\Delta U = C_v' \Delta T \quad (1.5.4)$$

y

$$\Delta U = m C_v \Delta T \quad (1.5.5)$$

1.6 Definición Termodinámica del Trabajo

Consideremos la expansión de un gas dentro de un cilindro de paredes rígidas adiabáticas cerrado por un émbolo móvil adiabático, de sección transversal de área A , como se ilustra en la Figura 6.

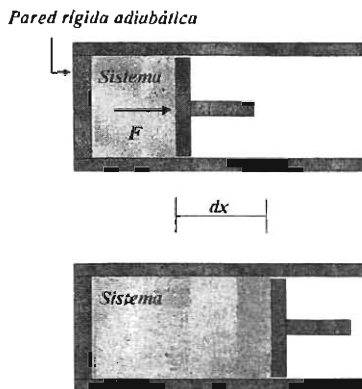


Figura 6

En cualquier instante durante este proceso la fuerza ejercida por el pistón sobre el gas es sólo infinitesimalmente menor que la ejercida por el gas sobre el pistón; esta última no es sino el producto de la presión P del gas por el área A del pistón. Como la fuerza actúa en dirección del movimiento del pistón, el trabajo hecho por el gas sobre el pistón al moverse éste la distancia dx , es

$$d'W = PAdx \quad (1.6.1a)$$

Pero $A dx = dV$, el cambio en el volumen del gas cuando el pistón se mueve la distancia dx . Se tiene por lo tanto,

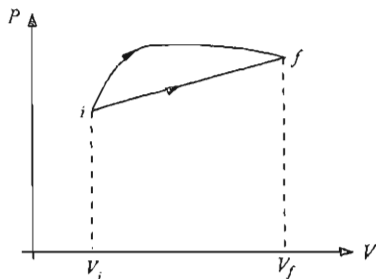
$$d'W = PdV \quad (1.6.1b)$$

Esta ecuación muestra que $d'W$ es positivo cuando dV es positivo; es decir se trata de una expansión y el volumen aumentará y $d'W$ es negativo cuando dV es negativo; en este caso se trata de una compresión y el volumen disminuirá.

Integrando la ecuación (1.6.1b) entre los estados inicial i y final f se encuentra que el trabajo total es,

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f d'W = \int_i^f PdV \quad (1.6.1c)$$

Esta integral es el área bajo la curva representativa de la trayectoria del proceso en el diagrama VP . Dado que los estados i y f pueden unirse por diversas trayectorias, la integral tendrá un valor diferente para cada trayectoria; por lo tanto, el trabajo, al depender del proceso, *no es una variable termodinámica*.



1.7 Resumen de la Unidad

Ecuación de estado de gas ideal

$$PV = mRT$$

Ecuaciones para los procesos politrópicos

$$P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$$

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\kappa-1} = \left(\frac{P_f}{P_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Primera Ley de la Termodinámica

$$\Delta U = Q - W$$

Convención de signos para el calor Q y el trabajo W (ver pie de página)

$$Q > 0 \quad \text{si el sistema absorbe calor}$$

$$Q < 0 \quad \text{si el sistema cede calor}$$

$$W > 0 \quad \text{si el sistema realiza trabajo}$$

$$W < 0 \quad \text{si se realiza trabajo sobre el sistema}$$

Relación Energía Interna – Temperatura

$$\Delta U = C_v \Delta T, \quad \text{en donde} \quad \left[C_v \right] = \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \quad \text{es la capacidad calorífica a volumen constante}$$

$$\Delta U = m C_v \Delta T, \quad \text{en donde} \quad \left[C_v \right] = \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \quad \text{es el calor específico a volumen constante}$$

Precaución: Se recomienda al lector que cuando consulte otros textos verifique la convención de signos usada para el trabajo, así como la ecuación representativa de la primera ley; ya que otros autores utilizan la convención contraria para el trabajo W .

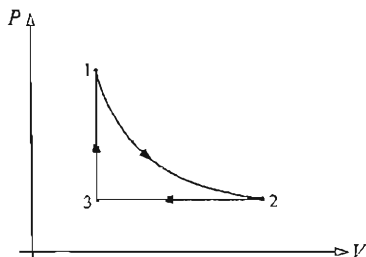
**1.8 Problemas Resueltos de la Selección de Problemas de Termodinámica,
Modelo de Primera Evaluación Parcial**

(82-1)

Problema 1.

Un sistema que consta de 2 kg de nitrógeno ($R = 0.297 \text{ kJ/kgK}$), efectúa los cambios politrópicos mostrados en el diagrama VP .

Llenar los espacios vacíos de la tabla.



κ	P/kPa	V/m^3	T/K	ΔP	ΔV	ΔT
1	1					
	2	4	600			
	3	2				
total						

Datos: $m = 2 \text{ kg}$, $R = 0.297 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

El proceso $(1 \rightarrow 2)$ es isotérmico, dado que $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 1$, por lo que

a) $T_1 = T_2 = 600 \text{ K}$, b) $\Delta T_{1 \rightarrow 2} = 0$

Paso 2.

Del diagrama VP se observa

a) $P_3 = P_2$, por lo que. b) $\Delta P_{2 \rightarrow 3} = 0$, c) $\kappa_{2 \rightarrow 3} = 0$

lo que significa que el proceso $(2 \rightarrow 3)$ es isobárico.

Paso 3.

El diagrama VP muestra que:

a) $V_1 = V_3 = 2 \text{ m}^3$, así que: b) $\Delta V_{3 \rightarrow 1} = V_1 - V_3 = 0$, c) $\kappa_{3 \rightarrow 1} = \infty$

esto es que el proceso $(3 \rightarrow 1)$ es isocórico.

Paso 4.

Ahora bien, de la ecuación de estado de gas ideal. $PV = mRT$ se obtiene:

$$a) \quad P_1 = \frac{mRT_1}{V_1} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(0.297 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 \text{ K})}{(2 \text{ m}^3)} = 178.2 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 178.2 \text{ kPa}$$

$$b) \quad P_2 = \frac{mRT_2}{V_2} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(0.297 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 \text{ K})}{(4 \text{ m}^3)} = 89.1 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 89.1 \text{ kPa}$$

o bien de la ecuación que describe los procesos politrópicos $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$ con $\kappa = 1$ se tiene que $P_2 V_2 = P_1 V_1$, de donde:

$$b) \quad P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = \frac{(178.2 \text{ kPa})(2 \text{ m}^3)}{(4 \text{ m}^3)} = 89.1 \text{ kPa}$$

También de la ecuación de estado de gas ideal,

$$c) \quad T_3 = \frac{P_3 V_3}{mR} = \frac{\left(89.1 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right)(2 \text{ m}^3)}{(2 \text{ kg})\left(0.297 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)} = 300 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 300 \text{ K}$$

Paso 5.

Conocidos los estados termodinámicos 1, 2, 3, 1 se determina el cambio en las variables termodinámicas debido a cada uno de los tres procesos:

- a) $\Delta P_{1 \rightarrow 2} = P_2 - P_1 = -89.1 \text{ kPa}$ b) $\Delta V_{1 \rightarrow 2} = V_2 - V_1 = 2 \text{ m}^3$
 c) $\Delta V_{2 \rightarrow 3} = V_3 - V_2 = -2 \text{ m}^3$ d) $\Delta T_{2 \rightarrow 3} = T_3 - T_2 = -300 \text{ K}$
 e) $\Delta P_{3 \rightarrow 1} = P_1 - P_3 = 89.1 \text{ kPa}$ f) $\Delta T_{3 \rightarrow 1} = T_1 - T_3 = 300 \text{ K}$

Paso 6.

$\Delta P_{\text{total}} = \Delta P_{1 \rightarrow 2} + \Delta P_{2 \rightarrow 3} + \Delta P_{3 \rightarrow 1} = (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + (P_1 - P_3)$, esto es que:

- a) $\Delta P_{\text{total}} = P_1 - P_1 = 0$ y análogamente:
 b) $\Delta V_{\text{total}} = V_1 - V_1 = 0$ y
 c) $\Delta T_{\text{total}} = T_1 - T_1 = 0$.

ya que en un ciclo la variación total en cualquier variable termodinámica es igual a cero.

κ	P/kPa			V/m^3			T/K			ΔP			ΔV			ΔT		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	178.2	89.1	89.1	2	4	2	600	600	300	89.1	0	89.1	2	-2	0	0	-300	300
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
∞	178.2	89.1	89.1	2	4	2	600	600	300	89.1	0	89.1	2	-2	0	0	-300	300
total										0	0	0	0	0	0	0	0	0

Problema 2.

Un gas ideal efectúa los cambios que se describen a continuación: pasa del estado 1 al 2, efectuando un trabajo de 200 kJ sin variar su temperatura; luego pasa del estado 2 al 3, absorbiendo 150 kJ de calor sin variar su volumen. Llenar los espacios vacíos en la tabla.

	ΔU / kJ	Q / kJ	W / kJ
1			
2			
3			
1 \rightarrow 3			

Solución:

Paso 1.

El sistema pasa del estado 1 al 2 realizando un trabajo de 200 kJ, sin variar su temperatura, lo cual significa que:

a) $W_{1 \rightarrow 2} = 200$ kJ, b) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$

De la ecuación de la 1ª Ley de la Termodinámica: $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$, se tiene que:

c) $Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2} = 200$ kJ

Paso 2.

Durante el proceso (2 \rightarrow 3) el sistema absorbe 150 kJ de calor, sin variar su volumen, esto es que: a) $Q_{2 \rightarrow 3} = 150$ kJ

Dado que en este proceso el volumen del sistema permanece constante, $dV = 0$ y de la definición de trabajo $W_{i \rightarrow f} = \int_i^f P dV$, resulta que: b) $W_{2 \rightarrow 3} = 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$ se obtiene

c) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} = 150$ kJ

Paso 3.

Finalmente, el valor total del cambio en la energía interna, así como del trabajo y de calor total intercambiado entre el sistema y los alrededores se obtiene sumando los correspondientes valores parciales en cada uno de los procesos, esto es:

a) $\Delta U_{1 \rightarrow 3} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} = (0 + 150)$ kJ = 150 kJ

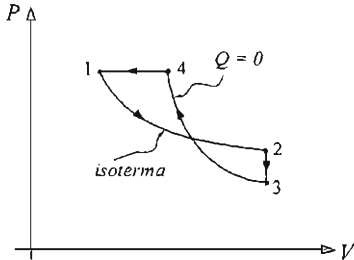
b) $Q_{1 \rightarrow 3} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} = (200 + 150)$ kJ = 350 kJ

c) $W_{1 \rightarrow 3} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} = (200 + 0)$ kJ = 200 kJ

	ΔU / kJ	Q / kJ	W / kJ
1	1b 0	1c 200	1a 200
2	2c 150	2a 150	2b 0
3			
1 \rightarrow 3	3a 150	3b 350	3c 200

Problema 3.

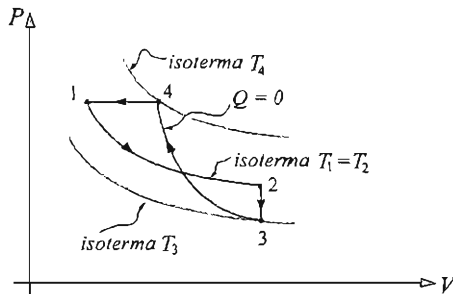
Un gas ideal experimenta los cambios politrópicos mostrados en el diagrama VP .
 Marcar con una "X" las relaciones correctas.



- | | |
|--------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> $V_1 < V_2$ | <input type="checkbox"/> $W_{1 \rightarrow 2} > 0$ |
| <input type="checkbox"/> $P_1 < P_2$ | <input type="checkbox"/> $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = W_{3 \rightarrow 4}$ |
| <input type="checkbox"/> $T_2 > T_3$ | <input type="checkbox"/> $W_{2 \rightarrow 3} > 0$ |
| <input type="checkbox"/> $T_1 < T_2$ | <input type="checkbox"/> $Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}$ |
| <input type="checkbox"/> $T_3 < T_4$ | <input type="checkbox"/> $\Delta U_{4 \rightarrow 1} < 0$ |

Solución:

El diagrama VP nos da la información explícita de como cambian las variables termodinámicas P y V debido a cada proceso; la variación en la variable temperatura la podemos también inferir directamente del diagrama trazando curvas de temperatura constante (isotermas) pasando por los estados 4 y 3 las cuales son paralelas a la curva de temperatura constante que une a los estados 1 y 2, de forma tal que, como se muestra en el diagrama inferior: $T_4 > (T_2 = T_1) > T_3$.



También del diagrama VP se infiere directamente el signo o valor del trabajo, W ya que este último se interpreta como el área bajo la curva que une cada pareja de estados termodinámicos y está definido como $W_{i \rightarrow f} = \int_i^f P dV$; por lo que comparando el volumen final con el inicial podemos saber el signo o el valor numérico de W .

El signo o el valor numérico de la variación de la energía interna, ΔU lo obtenemos, para cada proceso, de la relación $\Delta U = m C_v \Delta T$, esto es, directamente a través del signo de $\Delta T = T_f - T_i$.

Finalmente, de la ecuación de la Primera Ley de la Termodinámica $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f}$, encontramos la relación entre estas tres cantidades, dependiendo de las características de cada proceso.

Todo esto se detalla a continuación:

Paso 1.

El proceso (1 \rightarrow 2) es *isotérmico* y tiene las siguientes características:

$$a) \quad \kappa_{1 \rightarrow 2} = 1, \quad b) \quad P_2 < P_1, \quad c) \quad V_2 > V_1, \quad d) \quad W_{1 \rightarrow 2} > 0, \quad e) \quad T_2 = T_1,$$

$$f) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$, resulta que,

$$g) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}$$

Paso 2.

El proceso (2 \rightarrow 3) es *isocórico* y se caracteriza por

$$a) \quad \kappa_{2 \rightarrow 3} = \infty, \quad b) \quad P_3 < P_2, \quad c) \quad V_3 = V_2, \quad d) \quad W_{2 \rightarrow 3} = 0, \quad e) \quad T_3 < T_2,$$

$$f) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} < 0$$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, se tiene que

$$g) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3}$$

Paso 3.

El proceso (3 \rightarrow 4) es *adiabático* y tiene las siguientes características:

$$a) \quad \kappa_{3 \rightarrow 4} > 1, \quad b) \quad P_4 > P_3, \quad c) \quad V_4 < V_3, \quad d) \quad W_{3 \rightarrow 4} < 0, \quad e) \quad T_4 > T_3,$$

$$f) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 4} > 0, \quad g) \quad Q_{3 \rightarrow 4} = 0$$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4}$, resulta que

$$h) \Delta U_{3 \rightarrow 4} = -W_{3 \rightarrow 4}$$

Paso 4.

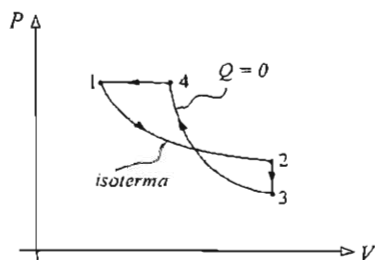
El proceso (4→1) es *isobárico*, así que

$$a) \kappa_{4 \rightarrow 1} = 0, \quad b) P_1 = P_4, \quad c) V_1 < V_4, \quad d) W_{4 \rightarrow 1} < 0, \quad e) T_1 < T_4,$$

$$f) \Delta U_{4 \rightarrow 1} < 0$$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{4 \rightarrow 1} = Q_{4 \rightarrow 1} - W_{4 \rightarrow 1}$, se obtiene

$$g) Q_{4 \rightarrow 1} = \Delta U_{4 \rightarrow 1} + W_{4 \rightarrow 1}$$



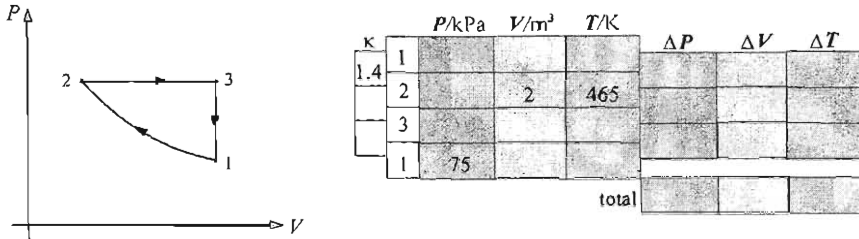
<input checked="" type="checkbox"/> (1c)	$V_1 < V_2$	<input checked="" type="checkbox"/> (1d)	$W_{1 \rightarrow 2} > 0$
<input type="checkbox"/> (1b)	$P_1 < P_2$	<input type="checkbox"/> (3h)	$\Delta U_{3 \rightarrow 4} = W_{3 \rightarrow 4}$
<input checked="" type="checkbox"/> (2e)	$T_2 > T_3$	<input type="checkbox"/> (2d)	$W_{2 \rightarrow 3} > 0$
<input type="checkbox"/> (1e)	$T_1 < T_2$	<input checked="" type="checkbox"/> (1g)	$Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}$
<input checked="" type="checkbox"/> (3e)	$T_3 < T_4$	<input checked="" type="checkbox"/> (4f)	$\Delta U_{4 \rightarrow 1} < 0$

(82-P)

Problema 1.

Un sistema que consta de 3 kg de aire ($R = 0.287 \text{ kJ/kgK}$), efectúa los cambios politrópicos mostrados en el diagrama PV .

Llenar los espacios vacíos de la tabla.



Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 0.287 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Se conoce el volumen y la temperatura en el estado 2, por lo que de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos:

$$a) \quad P_2 = \frac{mRT_2}{V_2} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (465 \text{ K})}{(2 \text{ m}^3)} = 200.18 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 200.18 \text{ kPa}$$

Paso 2.

El proceso (1→2) está caracterizado por $\kappa = 1.4$, así que de la ecuación de procesos politrópicos: $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$ determinamos el volumen en el estado 1, esto es:

$$P_2 V_2^{1.4} = P_1 V_1^{1.4}, \text{ de donde: } V_1^{1.4} = \frac{P_2 V_2^{1.4}}{P_1}; \text{ por lo que}$$

$$a) \quad V_1 = V_2 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1/1.4} = (2 \text{ m}^3) \left(\frac{200.18 \text{ kPa}}{75 \text{ kPa}} \right)^{1/1.4} = 4.03 \text{ m}^3$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$, obtenemos que:

$$b) \quad T_1 = \frac{P_1 V_1}{mR} = \frac{\left(75 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right) (4.03 \text{ m}^3)}{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)} = 351.04 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 351.04 \text{ K}$$

Paso 3.

Del diagrama PV se observa que:

a) $P_3 = P_2 = 200.18 \text{ kPa}$, por lo que: b) $\Delta P_{2 \rightarrow 3} = P_3 - P_2 = 0$, c) $\kappa_{2 \rightarrow 3} = 0$
lo cual significa que el proceso ($2 \rightarrow 3$) es isobárico.

Paso 4.

El diagrama PV muestra que:

a) $V_3 = V_1 = 4.03 \text{ m}^3$, así que: b) $\Delta V_{3 \rightarrow 1} = V_1 - V_3 = 0$, c) $\kappa_{3 \rightarrow 1} = \infty$
esto significa que el proceso ($3 \rightarrow 1$) es isocórico.

De la ecuación de estado del gas ideal, $PV = mRT$ determinamos,

$$d) \quad T_3 = \frac{P_3 V_3}{mR} = \frac{\left(200.18 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right) (4.03 \text{ m}^3)}{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)} = 936.96 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 936.96 \text{ K}$$

Paso 5.

Determinamos la variación en las variables termodinámicas debida a cada uno de los tres procesos:

- a) $\Delta P_{1 \rightarrow 2} = P_2 - P_1 = 125.18 \text{ kPa}$ b) $\Delta V_{1 \rightarrow 2} = V_2 - V_1 = -2.03 \text{ m}^3$
c) $\Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 = 113.96 \text{ K}$ d) $\Delta V_{2 \rightarrow 3} = V_3 - V_2 = 2.03 \text{ m}^3$
e) $\Delta T_{2 \rightarrow 3} = T_3 - T_2 = 471.96 \text{ K}$ f) $\Delta P_{3 \rightarrow 1} = P_1 - P_3 = -125.18 \text{ kPa}$
g) $\Delta T_{3 \rightarrow 1} = T_1 - T_3 = -585.92 \text{ K}$

Paso 6.

$\Delta P_{\text{total}} = \Delta P_{1 \rightarrow 2} + \Delta P_{2 \rightarrow 3} + \Delta P_{3 \rightarrow 1} = (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + (P_1 - P_3)$, esto es que:

a) $\Delta P_{\text{total}} = P_1 - P_1 = 0$ y análogamente:

b) $\Delta V_{\text{total}} = V_1 - V_1 = 0$ y

c) $\Delta T_{\text{total}} = T_1 - T_1 = 0$,

ya que en un ciclo la variación total en cualquier variable termodinámica es igual a cero.

κ		P/kPa	V/m^3	T/K	ΔP	ΔV	ΔT
1.4	1	75	2a 4.03	2b 351.04	5a 125.18	5b -2.03	5c 113.96
	2	200.18	2	465	3b 0	5d 2.03	5e 471.96
3c 0	3	200.18	4a 4.03	4d 936.96	5f -125.18	4b 0	5g -585.92
4c ∞	1	75	2a 4.03	2b 351.04			
total					6a 0	6b 0	6c 0

Problema 2.

Un gas ideal efectúa los cambios que se describen a continuación: en forma adiabática pasa del estado 1 al 2, disminuyendo su energía interna en 200 kJ; pasa del estado 2 al 3, en forma isotérmica cediendo 50 kJ de calor. Llenar los espacios vacíos en la tabla.

	$\Delta U / \text{kJ}$	Q / kJ	W / kJ
1			
2			
3			
1 \rightarrow 3			

Solución:

Paso 1.

El sistema pasa del estado 1 al 2 en forma adiabática, disminuyendo su energía interna en 200 kJ, lo cual significa que:

a) $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$, b) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -200 \text{ kJ}$

De la ecuación de la 1ª Ley de la Termodinámica $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, se tiene que:

c) $W_{1 \rightarrow 2} = -\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -(-200 \text{ kJ}) = 200 \text{ kJ}$

Paso 2.

Durante el proceso isotérmico (2 \rightarrow 3) el sistema cede 50 kJ de calor, esto es que:

a) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0$, b) $Q_{2 \rightarrow 3} = -50 \text{ kJ}$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3} = 0$ resulta que:

c) $W_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} = -50 \text{ kJ}$

Paso 3.

El valor total del cambio en la energía interna, así como del trabajo y de calor total intercambiado entre el sistema y los alrededores se obtiene sumando los correspondientes valores parciales en cada uno de los procesos, esto es:

a) $\Delta U_{1 \rightarrow 3} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} = (-200 + 0) \text{ kJ} = -200 \text{ kJ}$

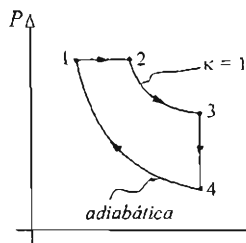
b) $Q_{1 \rightarrow 3} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} = (0 - 50) \text{ kJ} = -50 \text{ kJ}$

c) $W_{1 \rightarrow 3} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} = (200 - 50) \text{ kJ} = 150 \text{ kJ}$

	$\Delta U / \text{kJ}$	Q / kJ	W / kJ
1	1b - 200	1a 0	1c 200
2	2a 0	2b - 50	2c - 50
3			
1 \rightarrow 3	3a - 200	3b - 50	3c 150

Problema 3.

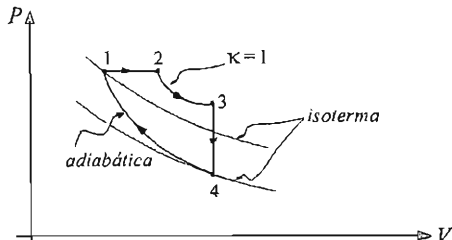
Un gas ideal experimenta los cambios mostrados en el diagrama VP .
 Marcar con una "X" las relaciones correctas.



- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> $V_1 < V_4$ | <input type="checkbox"/> $P_2 > P_3$ | <input type="checkbox"/> $Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}$ |
| <input type="checkbox"/> $P_3 > P_1$ | <input type="checkbox"/> $V_2 > V_3$ | <input type="checkbox"/> $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = W_{3 \rightarrow 4}$ |
| <input type="checkbox"/> $T_2 > T_1$ | <input type="checkbox"/> $T_4 > T_1$ | <input type="checkbox"/> $W_{2 \rightarrow 3} < 0$ |
| <input type="checkbox"/> $T_4 < T_3$ | <input type="checkbox"/> $T_2 = T_3$ | <input type="checkbox"/> $\Delta U_{4 \rightarrow 1} = Q_{4 \rightarrow 1}$ |
| <input type="checkbox"/> $P_1 > P_2$ | <input type="checkbox"/> $T_4 > T_2$ | <input type="checkbox"/> $U_3 > U_2$ |

Solución:

El diagrama VP nos da la información explícita de cómo cambian las variables termodinámicas P y V debido a cada proceso; la variación en la variable temperatura la podemos también inferir directamente del diagrama trazando curvas de temperatura constante (isotermas) pasando por los estados 1 y 4 las cuales son paralelas a la curva de temperatura constante que une a los estados 2 y 3, de forma tal que, como se muestra en el diagrama inferior: $(T_2 = T_3) > T_1 > T_4$.



También del diagrama VP se infiere directamente el signo o valor del trabajo, W ya que este último se interpreta como el área bajo la curva que une cada pareja de estados termodinámicos y está definido como $W_{i \rightarrow j} = \int_i^j P dV$; por lo que comparando el volumen final con el inicial podemos saber el signo o el valor numérico de W .

El signo o el valor numérico de la variación de la energía interna, ΔU lo obtenemos, para cada proceso, de la relación $\Delta U = mC_v \Delta T$, esto es, directamente a través del signo de $\Delta T = T_j - T_i$.

Finalmente, de la ecuación que caracteriza a la Primera Ley de la Termodinámica $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f}$, encontramos la relación entre estas tres cantidades, dependiendo de las características de cada proceso.

Todo esto se detalla a continuación:

Paso 1.

El proceso (1 \rightarrow 2) es *isobárico* y reúne las siguientes características:

a) $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 0$, b) $P_2 = P_1$, c) $V_2 > V_1$, d) $W_{1 \rightarrow 2} > 0$, e) $T_2 > T_1$,

f) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} > 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, resulta que:

g) $Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{1 \rightarrow 2}$

Paso 2.

El proceso (2 \rightarrow 3) es *isotérmico* y se caracteriza por:

a) $\kappa_{2 \rightarrow 3} = 1$, b) $P_3 < P_2$, c) $V_3 > V_2$, d) $W_{2 \rightarrow 3} > 0$, e) $T_3 = T_2$,

f) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0$, lo que implica que: g) $U_3 = U_2$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3} = 0$, se tiene que:

h) $Q_{2 \rightarrow 3} = W_{2 \rightarrow 3}$

Paso 3.

El proceso (3 \rightarrow 4) es *isocórico* y tiene las siguientes características:

a) $\kappa_{3 \rightarrow 4} = \infty$, b) $P_4 < P_3$, c) $V_4 = V_3$, d) $W_{3 \rightarrow 4} = 0$, e) $T_4 < T_3$,

f) $\Delta U_{3 \rightarrow 4} < 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4}$, resulta que:

g) $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4}$

Paso 4.

El proceso $(4 \rightarrow 1)$ es *adiabático* y se caracteriza por:

a) $\kappa_{4 \rightarrow 1} > 1$, b) $P_1 > P_4$, c) $V_1 < V_4$, d) $W_{4 \rightarrow 1} < 0$, e) $T_1 > T_4$,

f) $\Delta U_{4 \rightarrow 1} > 0$, g) $Q_{4 \rightarrow 1} = 0$

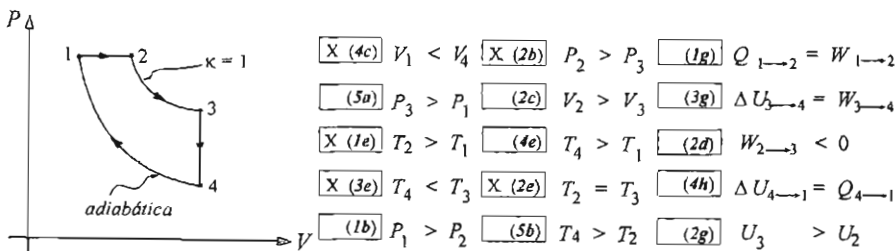
De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{4 \rightarrow 1} = Q_{4 \rightarrow 1} - W_{4 \rightarrow 1}$, resulta que:

h) $\Delta U_{4 \rightarrow 1} = -W_{4 \rightarrow 1}$

Paso 5.

Directamente del diagrama se observa que: a) $P_3 < P_1$,

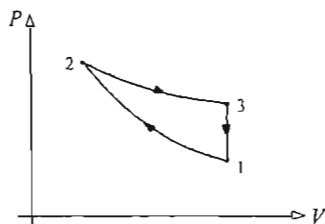
De la comparación de isothermas se tiene que: b) $T_4 < T_2$



Problema 1.

Un sistema que consta de 3 kg de nitrógeno ($R = 0.297 \text{ kJ/kgK}$), efectúa los cambios politrópicos mostrados en el diagrama VP .

Llenar los espacios vacíos de la tabla.



κ	P/kPa	V/m^3	T/K	ΔP	ΔV	ΔT
1.4	1		300			
	2	150				
	3	5				0
1						
total						

Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 0.297 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Del diagrama VP se observa que:

a) $V_1 = V_3 = 5 \text{ m}^3$, así que, b) $\Delta V_{3 \rightarrow 1} = 0$, c) $\kappa_{3 \rightarrow 1} = \infty$

lo cual significa que el proceso ($3 \rightarrow 1$) es isocórico.

Paso 2.

Conocidos el volumen y la temperatura en el estado 1, de la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ se obtiene

$$a) \quad P_1 = \frac{mRT_1}{V_1} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.297 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 \text{ K})}{(5 \text{ m}^3)} = 53.46 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 53.46 \text{ kPa}$$

El proceso ($1 \rightarrow 2$) está caracterizado por $\kappa = 1.4$, así que de la ecuación de procesos politrópicos $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, determinamos el volumen en el estado 2, esto es:

$$P_2 V_2^{1.4} = P_1 V_1^{1.4}, \text{ de donde: } V_2^{1.4} = \frac{P_1 V_1^{1.4}}{P_2}; \text{ por lo tanto:}$$

$$b) \quad V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{1/1.4} = (5 \text{ m}^3) \left(\frac{53.46 \text{ kPa}}{150 \text{ kPa}} \right)^{1/1.4} = 2.39 \text{ m}^3$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ resulta que

$$c) \quad T_2 = \frac{P_2 V_2}{mR} = \frac{\left(150 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right) \left(2.39 \text{ m}^3\right)}{(3 \text{ kg}) \left(0.297 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}\right)} = 402.36 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 402.36 \text{ K}$$

Paso 3.

El proceso (2→3) es isotérmico, porque $\Delta T_{2 \rightarrow 3} = T_3 - T_2 = 0$, entonces

$$a) \quad T_3 = T_2 = 402.36 \text{ K} \quad , \quad b) \quad \kappa_{2 \rightarrow 3} = 1$$

La presión en el estado 3 la determinamos de la ecuación de estado, esto es

$$c) \quad P_3 = \frac{mRT_3}{V_3} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.297 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}\right) (402.36 \text{ K})}{(5 \text{ m}^3)} = 71.70 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 71.70 \text{ kPa}$$

Paso 4.

Determinamos la variación en las variables termodinámicas debida a cada uno de los tres procesos:

$$a) \quad \Delta P_{1 \rightarrow 2} = P_2 - P_1 = 96.54 \text{ kPa}$$

$$b) \quad \Delta V_{1 \rightarrow 2} = V_2 - V_1 = -2.61 \text{ m}^3$$

$$c) \quad \Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 = 102.36 \text{ K}$$

$$d) \quad \Delta P_{2 \rightarrow 3} = P_3 - P_2 = -78.3 \text{ kPa}$$

$$e) \quad \Delta V_{2 \rightarrow 3} = V_3 - V_2 = 2.61 \text{ m}^3$$

$$f) \quad \Delta P_{3 \rightarrow 1} = P_1 - P_3 = -18.24 \text{ kPa}$$

$$g) \quad \Delta T_{3 \rightarrow 1} = T_1 - T_3 = -102.36 \text{ K}$$

Paso 5.

$$\Delta P_{\text{total}} = \Delta P_{1 \rightarrow 2} + \Delta P_{2 \rightarrow 3} + \Delta P_{3 \rightarrow 1} = (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + (P_1 - P_3), \text{ esto es que}$$

$$a) \quad \Delta P_{\text{total}} = P_1 - P_1 = 0 \quad \text{y análogamente:}$$

$$b) \quad \Delta V_{\text{total}} = V_1 - V_1 = 0 \quad \text{y}$$

$$c) \quad \Delta T_{\text{total}} = T_1 - T_1 = 0 \quad ,$$

ya que en un ciclo la variación total en cualquier variable termodinámica es igual a cero.

κ		P/kPa	V/m^3	T/K	ΔP	ΔV	ΔT
1.4	1	^{2a} 53.46	^{1a} 5	300	^{4a} 96.54	^{4b} -2.61	^{4c} 102.36
	2	^{1b} 150	^{2b} 2.39	^{2c} 402.36	^{4d} -78.3	^{4e} 2.61	0
1	3	^{3c} 71.70	5	^{3a} 402.36	^{4f} -18.24	^{1b} 0	^{4g} -102.36
∞	1	^{2a} 53.46	^{1a} 5	300			
total					^{5a} 0	^{5b} 0	^{5c} 0

Problema 2.

Un gas ideal efectúa los siguientes cambios: a presión constante pasa del estado 1 al 2, disminuyendo su energía interna en 180 kJ; pasa del estado 2 al 3, en forma adiabática realizándose sobre el sistema un trabajo de 300 kJ; finalmente, pasa del 3 al 4 a temperatura constante, absorbiendo 600 kJ de calor.

Sabiendo que el trabajo total realizado por el sistema sobre los alrededores es de 100 kJ.

Llenar la tabla.

	ΔU / kJ	Q / kJ	W / kJ
1			
2			
3			
4			
total			

Solución:

Paso 1.

Durante el proceso (1→2), en forma isobárica la energía interna del sistema disminuye en 180 kJ, esto es:

a) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -180 \text{ kJ}$

Paso 2.

En forma adiabática el sistema pasa del estado 2 al 3, realizándose sobre el sistema un trabajo de 300 kJ, lo cual significa

a) $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$, b) $W_{2 \rightarrow 3} = -300 \text{ kJ}$

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley a este proceso $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, se tiene que

c) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -W_{2 \rightarrow 3} = -(-300 \text{ kJ}) = 300 \text{ kJ}$

Paso 3.

El sistema pasa del estado 3 al 4 mediante un proceso a temperatura constante, durante el cual el sistema absorbe 600 kJ de calor, por lo tanto:

a) $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = 0$, b) $Q_{3 \rightarrow 4} = 600 \text{ kJ}$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4} = 0$, se tiene que

c) $W_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} = 600 \text{ kJ}$

2893209

Paso 4.

Se sabe que el trabajo total realizado por el sistema sobre los alrededores es de 100 kJ, lo que significa que: a) $W_{total} = 100 \text{ kJ}$,

y dado que: $W_{total} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4}$, entonces

$$W_{1 \rightarrow 2} = W_{total} - (W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4}) : \text{ esto es que}$$

$$b) \quad W_{1 \rightarrow 2} = (100 \text{ kJ}) - (-300 + 600) \text{ kJ} = -200 \text{ kJ}$$

Paso 5.

Aplicando la ecuación de 1ª Ley al proceso (1→2): $\Delta U_{1 \rightarrow 2} \cong Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, resulta

$$a) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + W_{1 \rightarrow 2} = (-180 - 200) \text{ kJ} = -380 \text{ kJ}$$

Paso 6.

La variación total en la energía interna del sistema es.

$$a) \quad \Delta U_{total} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 4} = (-180 + 300 + 0) \text{ kJ} = 120 \text{ kJ}$$

y el calor total intercambiado entre el sistema y los alrededores:

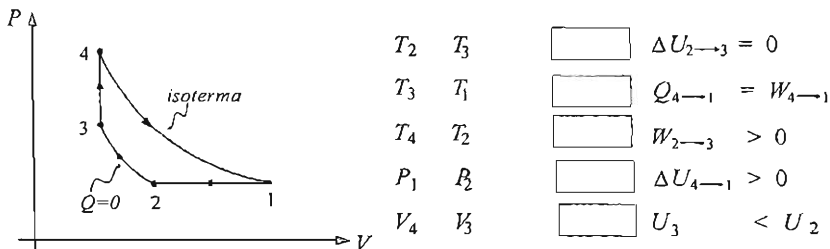
$$b) \quad Q_{total} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} = (-380 + 0 + 600) \text{ kJ} = 220 \text{ kJ}$$

	$\Delta U / \text{kJ}$	Q / kJ	W / kJ
1	1a -180	5a -380	4b -200
2	2c 300	2a 0	2b -300
3	3a 0	3b 600	3c 600
4			
total	6a 120	6b 220	4a 100

Problema 3.

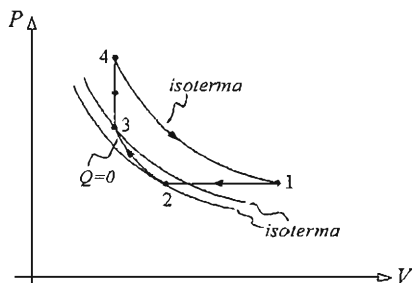
Un gas ideal experimenta los cambios mostrados en el diagrama VP .

- a) Establecer para cada par de variables el signo correspondiente ($>$, $=$, $<$).
 b) Clasificar como verdadera (V) o falsa (F) cada una de las relaciones indicadas.



Solución:

El diagrama VP nos da la información explícita de cómo cambian las variables termodinámicas P y V debido a cada proceso; la variación en la variable temperatura la podemos también inferir directamente del diagrama trazando curvas de temperatura constante (isotermas) pasando por los estados 2 y 3 las cuales son paralelas a la curva de temperatura constante que une a los estados 1 y 2, de forma tal que, como se muestra en el diagrama inferior: $(T_4 = T_1) > T_3 > T_2$.



También del diagrama VP se infiere directamente el signo o valor del trabajo, W ya que este último se interpreta como el área bajo la curva que une cada pareja de estados termodinámicos y está definido como $W_{i \rightarrow f} = \int_i^f P dV$; por lo que comparando el volumen final con el inicial podemos saber el signo o el valor numérico de W .

El signo o el valor numérico de la variación de la energía interna, ΔU lo obtenemos, para cada proceso, de la relación $\Delta U = m C_V \Delta T$, esto es, directamente a través del signo de $\Delta T = T_f - T_i$.

Finalmente, de la ecuación que caracteriza a la Primera Ley de la Termodinámica $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f}$, encontramos la relación entre estas tres cantidades, dependiendo de las características de cada proceso.

Todo esto se detalla a continuación:

Paso 1.

El proceso (1 \rightarrow 2) es *isobárico* y tiene las siguientes características:

- a) $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 0$, b) $P_2 = P_1$, c) $V_2 < V_1$, d) $W_{1 \rightarrow 2} < 0$, e) $T_2 < T_1$,
f) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} < 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, se tiene que

g) $Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{1 \rightarrow 2}$

Paso 2.

El proceso (2 \rightarrow 3) es *adiabático* y se caracteriza por

- a) $\kappa_{2 \rightarrow 3} > 1$, b) $P_3 > P_2$, c) $V_3 < V_2$, d) $W_{2 \rightarrow 3} < 0$, e) $T_3 > T_2$,
f) $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$, g) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} > 0$, h) $U_3 > U_2$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, resulta que: i) $W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3}$

Paso 3.

El proceso (3 \rightarrow 4) es *isocórico* y tiene las siguientes características:

- a) $\kappa_{3 \rightarrow 4} = \infty$, b) $P_4 > P_3$, c) $V_4 = V_3$, d) $W_{3 \rightarrow 4} = 0$, e) $T_4 > T_3$,
f) $\Delta U_{3 \rightarrow 4} > 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4}$, resulta que: g) $Q_{3 \rightarrow 4} = \Delta U_{3 \rightarrow 4}$

Paso 4.

El proceso (4→1) es *isotérmico* y se caracteriza por

a) $\kappa_{4\rightarrow 1} = 1$, b) $T_1 = T_4$, c) $V_1 > V_4$, d) $W_{4\rightarrow 1} > 0$, e) $\Delta U_{4\rightarrow 1} = 0$

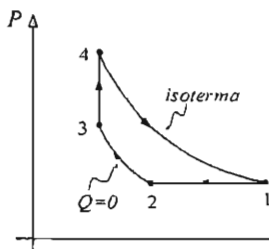
De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{4\rightarrow 1} = Q_{4\rightarrow 1} - W_{4\rightarrow 1} = 0$, se obtiene:

f) $Q_{4\rightarrow 1} = W_{4\rightarrow 1}$

Paso 5.

De la curva en donde se muestran las isothermas pasando por cada uno de los estados termodinámicos se observa que:

a) $T_3 < T_1$, b) $T_4 > T_2$



(2e) $T_2 < T_3$

F (2g) $\Delta U_{2\rightarrow 3} = 0$

(5a) $T_3 < T_1$

V (4f) $Q_{4\rightarrow 1} = W_{4\rightarrow 1}$

(5b) $T_4 > T_2$

F (2d) $W_{2\rightarrow 3} > 0$

(1b) $P_1 = P_2$

F (4e) $\Delta U_{4\rightarrow 1} > 0$

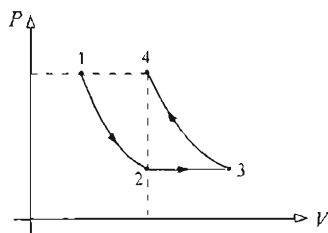
(3c) $V_4 = V_3$

F (2h) $U_3 < U_2$

Problema 1.

Un sistema que consta de 3 kg de nitrógeno ($R = 0.297 \text{ kJ/kgK}$), realiza los cambios politrópicos mostrados en el diagrama VP .

Llenar los espacios vacíos de la tabla.



	P/kPa	V/m^3	T/K	ΔP	ΔV	ΔT
κ	1	200				0
	2		405			
1.4	3					
	4	3				
	1 → 4					

Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 0.297 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Del diagrama VP se observa que: a) $P_4 = P_1 = 200 \text{ kPa}$, así que: b) $\Delta P_{1 \rightarrow 4} = 0$,

c) $P_3 = P_2$, por lo que: d) $\Delta P_{2 \rightarrow 3} = 0$, e) $\kappa_{2 \rightarrow 3} = 0$

El diagrama también muestra que: f) $V_2 = V_4 = 3 \text{ m}^3$

De la tabla se sabe que $\Delta T_{1 \rightarrow 2} = 0 = T_2 - T_1$, luego entonces:

g) $T_1 = T_2 = 405 \text{ K}$, h) $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 1$

Paso 2.

Conocidos la presión y la temperatura en el estado 1, de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos el volumen en el estado inicial,

$$a) \quad V_1 = \frac{mRT_1}{P_1} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.297 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (405 \text{ K})}{200 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 1.80 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 1.80 \text{ m}^3$$

De la ecuación de procesos politrópicos: $P_f V_f^{\kappa} = P_i V_i^{\kappa}$, con $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 1$ determinamos la presión en el estado 2, esto es: $P_2 V_2 = P_1 V_1$, de donde:

$$b) \quad P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = \frac{(200 \text{ kPa})(1.80 \text{ m}^3)}{(3 \text{ m}^3)} = 120 \text{ kPa} = P_3$$

Paso 3.

El proceso (3→4) está caracterizado por $\kappa_{3 \rightarrow 4} = 1.4$, así que de la ecuación de procesos politrópicos $P_f V_f^{\kappa} = P_i V_i^{\kappa}$, determinamos el volumen en el estado 3; esto es:

$$P_3 V_3^{1.4} = P_4 V_4^{1.4}, \text{ de donde: } V_3^{1.4} = \frac{P_4 V_4^{1.4}}{P_3}$$

$$a) \quad V_3 = V_4 \left(\frac{P_4}{P_3} \right)^{1/1.4} = (3 \text{ m}^3) \left(\frac{200 \text{ kPa}}{120 \text{ kPa}} \right)^{1/1.4} = 4.32 \text{ m}^3$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$, obtenemos

$$b) \quad T_3 = \frac{P_3 V_3}{mR} = \frac{\left(120 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right) (4.32 \text{ m}^3)}{(3 \text{ kg}) \left(0.297 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right)} = 581.82 \frac{\text{kJ}}{\text{kJ}} = 581.82 \text{ K}$$

Finalmente,

$$c) \quad T_4 = \frac{P_4 V_4}{mR} = \frac{\left(200 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right) (3 \text{ m}^3)}{(3 \text{ kg}) \left(0.297 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right)} = 673.40 \frac{\text{kJ}}{\text{kJ}} = 673.40 \text{ K}$$

Paso 4.

Determinamos la variación en las variables termodinámicas debida a cada uno de los tres procesos:

$$a) \Delta P_{1 \rightarrow 2} = P_2 - P_1 = -80 \text{ kPa}$$

$$b) \Delta V_{1 \rightarrow 2} = V_2 - V_1 = 1.20 \text{ m}^3$$

$$c) \Delta V_{2 \rightarrow 3} = V_3 - V_2 = 1.32 \text{ m}^3$$

$$d) \Delta T_{2 \rightarrow 3} = T_3 - T_2 = 176.82 \text{ K}$$

$$e) \Delta P_{3 \rightarrow 4} = P_4 - P_3 = 80 \text{ kPa}$$

$$f) \Delta V_{3 \rightarrow 4} = V_4 - V_3 = -1.32 \text{ m}^3$$

$$g) \Delta T_{3 \rightarrow 4} = T_4 - T_3 = 91.58 \text{ K}$$

Paso 5.

La variación total en las variables volumen y temperatura:

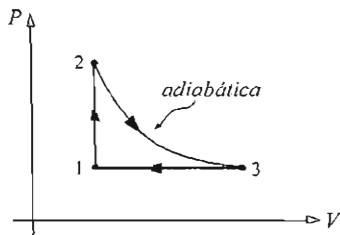
$$a) \Delta V_{total} = \Delta V_{1 \rightarrow 2} + \Delta V_{2 \rightarrow 3} + \Delta V_{3 \rightarrow 4} = 1.20 \text{ m}^3$$

$$b) \Delta T_{total} = \Delta T_{1 \rightarrow 2} + \Delta T_{2 \rightarrow 3} + \Delta T_{3 \rightarrow 4} = 268.40 \text{ K}$$

κ	P/kPa		V/m ³		T/K		ΔP	ΔV	ΔT
	1	2a	1a	2b	1g	2g			
1h	1	200	1.80	405	4a	80	4b	1.20	0
1e	2	120	3	405	1d	0	4c	1.32	176.82
0	3	120	4.32	581.82	4e	80	4f	-1.32	91.58
1.4	4	200	3	673.4	1b	0	5a	1.20	268.40
1 → 4					1b	0	5a	1.20	268.40

Problema 2.

Un gas ideal ($C_V' = 20 \text{ kJ/K}$) efectúa los cambios ilustrados en el plano VP . Llenar los espacios vacíos en la tabla.



T/K		$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ
	1			
	2	6000		
450	3			
300	1			
	neto			1000

Datos: ($C_V' = 20 \text{ kJ/K}$)

Solución:

Paso 1.

El sistema parte del estado 1 cuya temperatura es: a) $T_1 = 300 \text{ K}$ y como indica el diagrama, mediante un proceso isocórico llega al estado 2, por lo que,

b) $W_{1 \rightarrow 2} = 0$

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley a este proceso $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, se tiene que

c) $Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 6000 \text{ kJ}$

El proceso (2→3) es adiabático, por lo que

d) $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$

Dado que el sistema realiza un ciclo, la variación en cualquier variable termodinámica es igual a cero, de aquí que: e) $\Delta U_{\text{neto}} = 0$, y de la 1ª Ley de la termodinámica se tiene que $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$; de donde:

f) $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}} = 1000 \text{ kJ}$

Paso 2.

La variación en la energía interna está relacionada con el cambio en temperatura mediante la ecuación: $\Delta U = C_V' \Delta T$. Aplicando esta ecuación para el proceso (1→2):

$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = C_V' (T_2 - T_1)$; luego entonces,

$$a) \quad T_2 = T_1 + \frac{\Delta U_{1 \rightarrow 2}}{C_V} = (300 \text{ K}) + \frac{6000 \text{ kJ}}{20 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 600 \text{ K}$$

Para el proceso (2→3):

$$b) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = C_V (T_3 - T_2) = \left(20 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) (450 - 600) \text{ K} = -3000 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, se tiene

$$c) \quad W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(-3000 \text{ kJ}) = 3000 \text{ kJ}$$

Paso 3.

Dado que $\Delta U_{\text{neto}} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0$, entonces:

$$a) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{\text{neto}} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (6000 - 3000) \text{ kJ} = -3000 \text{ kJ}$$

De manera análoga,

$$Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = 1000 \text{ kJ}, \text{ de donde:}$$

$$b) \quad Q_{3 \rightarrow 1} = Q_{\text{neto}} - (Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3}) = (1000 \text{ kJ}) - (6000 + 0) \text{ kJ} = -5000 \text{ kJ}$$

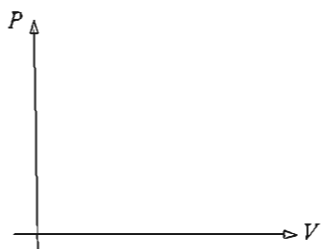
Finalmente, aplicando la ecuación de la Primera Ley al proceso isobárico (3→1): $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$, se tiene

$$c) \quad W_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - \Delta U_{3 \rightarrow 1} = (-5000 \text{ kJ}) - (-3000 \text{ kJ}) = -2000 \text{ kJ}$$

T/K					
1a	300	1	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ
2a	600	2	6000	1c 6000	1b 0
	450	3	2b - 3000	1d 0	2c 3000
3a	300	1	3a - 3000	3b - 5000	3c - 2000
neto		1e	0	1f 1000	1000

Problema 3.

Esbozar en el plano VP el ciclo formado por tres procesos politrópicos a los que es sometido un gas ideal; tal que se cumplen las condiciones indicadas a la derecha del plano.



$$P_2 = P_1$$

$$T_3 > T_2 \quad Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3}$$

$$V_1 > V_3 \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0$$

Solución:

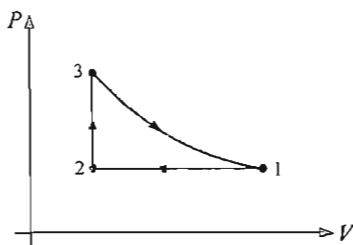
En este problema nos dan las características que definen al ciclo:

El proceso $(1 \rightarrow 2)$ es isobárico, la curva que une a estos dos estados en el plano VP es una recta paralela al eje de volumen.

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$ concluimos que el proceso $(2 \rightarrow 3)$ es isocórico, lo que significa que $V_3 = V_2$, entonces la curva que une a estos estados es una recta paralela al eje de la presión en el sentido de P creciente ya que $T_3 > T_2$.

El proceso $(3 \rightarrow 1)$ ocurre a temperatura constante, puesto que la variación en la energía interna es igual a cero; y el trabajo en este proceso es positivo puesto que $V_1 > V_3$. Pero dado que $V_3 = V_2$, entonces: $V_1 > V_2$; por lo tanto en el proceso $(1 \rightarrow 2)$ el trabajo es negativo, es decir se trata de una compresión isobárica.

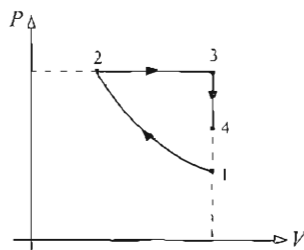
Por lo tanto el ciclo al que se hace referencia se representa en el plano VP como se indica en el diagrama.



Problema 1.

Un sistema que consta de 3 kg de helio ($R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$), se somete a los cambios politrópicos ilustrados en el diagrama $P-V$.

Llenar los espacios vacíos de la tabla.



κ	P, kPa	V, m^3	T, K	ΔP	ΔV	ΔT
1	312	8			-3	0
2						
3						
4			500			
total						

Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Se conoce la presión y el volumen en el estado 1, y de la ecuación de estado de gas ideal se tiene que,

$$a) \quad T_1 = \frac{P_1 V_1}{mR} = \frac{\left(312 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right)(8 \text{ m}^3)}{(3 \text{ kg})\left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)} = 400 \frac{\text{kJ}}{\text{kJ}} = 400 \text{ K}$$

El proceso $(1 \rightarrow 2)$ ocurre a temperatura constante ya que $\Delta T_{1 \rightarrow 2} = 0$; por lo tanto:

$$b) \quad \kappa_{1 \rightarrow 2} = 1, \quad c) \quad T_2 = T_1 = 400 \text{ K}$$

Se sabe que $\Delta V_{1 \rightarrow 2} = V_2 - V_1 = -3 \text{ m}^3$, así que

$$d) \quad V_2 = V_1 + \Delta V_{1 \rightarrow 2} = (8 - 3) \text{ m}^3 = 5 \text{ m}^3$$

De la ecuación de procesos politrópicos $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, con $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 1$ determinamos la presión en el estado 2, esto es: $P_2 V_2 = P_1 V_1$, de donde:

$$e) \quad P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = \frac{(312 \text{ kPa})(8 \text{ m}^3)}{(5 \text{ m}^3)} = 499.2 \text{ kPa}$$

Finalmente, para este primer proceso se tiene que:

$$f) \quad \Delta P_{1 \rightarrow 2} = P_2 - P_1 = (499.2 - 312) \text{ kPa} = 187.2 \text{ kPa}$$

Paso 2.

El diagrama VP muestra que el proceso $(2 \rightarrow 3)$ es isobárico, esto es que:

a) $\kappa_{2 \rightarrow 3} = 0$, b) $P_3 = P_2 = 499.2 \text{ kPa}$, c) $\Delta P_{2 \rightarrow 3} = 0$

También del diagrama VP se observa que:

d) $V_4 = V_3 = V_1 = 8 \text{ m}^3$, así que: e) $\Delta V_{1 \rightarrow 4} = \Delta V_{\text{total}} = 0$, f) $\kappa_{3 \rightarrow 4} = \infty$, y g) $\Delta V_{3 \rightarrow 4} = 0$

Mediante la ecuación de estado se calculan:

$$h) T_3 = \frac{P_3 V_3}{mR} = \frac{\left(499.2 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right) (8 \text{ m}^3)}{(3 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)} = 640 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 640 \text{ K}$$

y

$$i) P_4 = \frac{mRT_4}{V_4} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right) (500 \text{ K})}{(8 \text{ m}^3)} = 390 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 390 \text{ kPa}$$

Paso 3.

Determinamos la variación en las variables termodinámicas debida a cada uno de los tres procesos:

a) $\Delta V_{2 \rightarrow 3} = V_3 - V_2 = 3.0 \text{ m}^3$

b) $\Delta T_{2 \rightarrow 3} = T_3 - T_2 = 240 \text{ K}$

c) $\Delta P_{3 \rightarrow 4} = P_4 - P_3 = -109.20 \text{ kPa}$

d) $\Delta T_{3 \rightarrow 4} = T_4 - T_3 = -140 \text{ K}$

Paso 4.

La variación total en las variables presión y temperatura:

a) $\Delta P_{\text{total}} = \Delta P_{1 \rightarrow 2} + \Delta P_{2 \rightarrow 3} + \Delta P_{3 \rightarrow 4} = 78 \text{ kPa}$

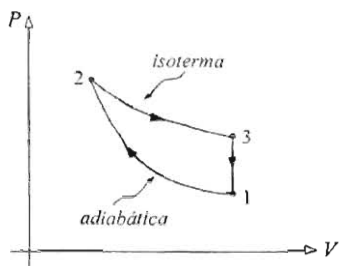
b) $\Delta T_{\text{total}} = \Delta T_{1 \rightarrow 2} + \Delta T_{2 \rightarrow 3} + \Delta T_{3 \rightarrow 4} = 100 \text{ K}$

κ		P/kPa	V/m^3	T/K	ΔP	ΔV	ΔT
$1b$	1	312	8	$1a$ 400	$1f$ 187.2	-3	0
$2a$	2	$1e$ 499.2	$1d$ 5	$1c$ 400	$2c$ 0	$3a$ 3	$3b$ 240
$2f$	3	$2b$ 499.2	$2d$ 8	$2h$ 640	$3c$ -109.2	$2g$ 0	$3d$ -140
	4	$2i$ 390	$2d$ 8	500			
total					$4a$ 78	$2e$ 0	$4b$ 100

Problema 2.

Un gas ideal ($C_v = 15 \text{ kJ/K}$) efectúa los cambios ilustrados en el diagrama en el plano VP .

Llenar los espacios vacíos en la tabla.



T/K		$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ
350	1			
500	2			
	3		3000	
	1			
	neto			

Datos: ($C_v = 15 \text{ kJ/K}$)

Solución:

Paso 1.

El proceso (1→2) es adiabático lo cual significa:

a) $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$

De la relación $\Delta U = C_v \Delta T$, determinamos:

b) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = C_v (T_2 - T_1) = \left(15 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}\right)(500 - 350) \text{ K} = 2250 \text{ kJ}$

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley a este proceso, $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, se tiene que

c) $W_{1 \rightarrow 2} = -\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -(2250 \text{ kJ}) = -2250 \text{ kJ}$

Paso 2.

El proceso (2→3) es isotérmico, por lo que

a) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0$, b) $T_3 = T_2 = 500 \text{ K}$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3} = 0$, resulta

c) $W_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} = 3000 \text{ kJ}$

Paso 3.

Dado que el sistema realiza un ciclo, la variación en cualquier variable termodinámica es igual a cero, de aquí que:

$$a) \Delta U_{neto} = 0, \quad b) \Delta T_{neto} = 0 = T_f - T_i; \text{ de donde}$$

$$c) T_f = T_i = T_1 = 350 \text{ K}$$

Como $\Delta U_{neto} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0$, entonces:

$$d) \Delta U_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{neto} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (2250 + 0) \text{ kJ} = -2250 \text{ kJ}$$

Paso 4.

El proceso (3 → 1) es isocórico, así que: a) $W_{3 \rightarrow 1} = 0$ y aplicando la ecuación de la 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$, resulta que

$$b) Q_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{3 \rightarrow 1} = -2250 \text{ kJ}$$

Paso 5.

Finalmente, la suma del calor intercambiado entre el sistema y los alrededores en cada uno de los procesos nos da el calor neto o total:

$$a) Q_{neto} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = (0 + 3000 - 2250) \text{ kJ} = 750 \text{ kJ},$$

De la 1ª Ley de la termodinámica se tiene que: $\Delta U_{neto} = Q_{neto} - W_{neto} = 0$; de donde

$$b) W_{neto} = Q_{neto} = 750 \text{ kJ}$$

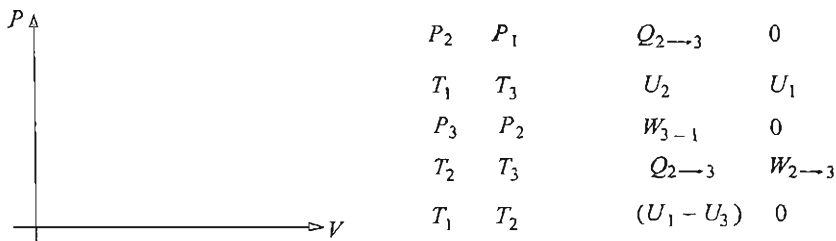
T/K		$\Delta U/\text{kJ}$		Q/kJ		W/kJ	
350	1	1b	2250	1a	0	1c	2250
500	2	2a	0		3000	2c	3000
2b	500	3d	-2250	4b	-2250	4a	0
3c	350						
neto		3a	0	5a	750	5b	750

Problema 3.

Un gas ideal efectúa sucesivamente los cambios politrópicos que a continuación se describen:

1→2	compresión adiabática ($\kappa > 1$)
2→3	expansión isotérmica
3→1	cambio isobárico

- a) Esbozar el diagrama del ciclo en el plano VP ,
 b) escribir el signo correspondiente ($>$, $=$, $<$) entre cada par de relaciones a la derecha del diagrama.



Solución:

Paso 1.

El proceso (1→2) consiste en una compresión adiabática, lo cual significa que,

a) $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$, b) $W_{1 \rightarrow 2} < 0$, por lo que: c) $V_2 < V_1$

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, se tiene

d) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2}$; sustituyendo en esta ecuación a $W_{1 \rightarrow 2}$, resulta que:

e) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -(-W_{1 \rightarrow 2}) > 0$, y como $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = U_2 - U_1$, entonces: f) $U_2 > U_1$

De la relación entre la variación en la energía interna y la temperatura: $\Delta U = m C_v \Delta T$, se tiene que: g) $\Delta T_{1 \rightarrow 2} = (T_2 - T_1) > 0$, de donde: h) $T_2 > T_1$

La representación de este proceso en el plano VP es mediante una curva tipo hipérbola en la que al disminuir el volumen, la presión aumenta; esto es que: i) $P_2 > P_1$

Paso 2.

El proceso (2→3) es una expansión isotérmica, así que:

$$a) \Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0, \quad b) T_3 = T_2, \quad c) W_{2 \rightarrow 3} > 0, \quad \text{por lo que:} \quad d) V_3 > V_2$$

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3} = 0$, se tiene que:

$$e) Q_{2 \rightarrow 3} = W_{2 \rightarrow 3}, \quad \text{y dado que en este proceso el trabajo es positivo, entonces:}$$

$$f) Q_{2 \rightarrow 3} > 0$$

Este proceso en el plano VP se representa mediante una curva tipo hipérbola (de pendiente más negativa que la que une a los estados 1 y 2), en la que al aumentar el volumen, la presión disminuye; esto es que: $g) P_3 < P_2$

Paso 3.

El proceso (3→1) consiste en un cambio isobárico, lo que significa: $a) P_1 = P_3$

El proceso en el plano VP es representado a través de una recta paralela al eje de volumen. El sistema tiene que regresar al estado inicial mediante un proceso de compresión, esto es que

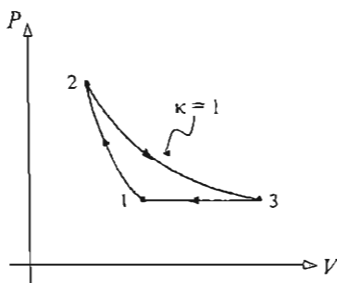
$$b) W_{3 \rightarrow 1} < 0, \quad c) V_1 < V_3,$$

En un proceso a presión constante, al disminuir el volumen, la temperatura disminuye también; por lo tanto:

$$d) T_1 < T_3, \quad e) \Delta T_{3 \rightarrow 1} < 0$$

Finalmente, dado que $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = m C_V \Delta T_{3 \rightarrow 1}$, resulta que: $f) \Delta U_{3 \rightarrow 1} < 0$ y como

$$\Delta U_{3 \rightarrow 1} = (U_1 - U_3), \quad \text{entonces:} \quad g) (U_1 - U_3) < 0$$



$$(1i) \quad P_2 > P_1 \quad (2f) \quad Q_{2 \rightarrow 3} > 0$$

$$(3d) \quad T_1 < T_3 \quad (1f) \quad U_2 > U_1$$

$$(2g) \quad P_3 < P_2 \quad (3b) \quad W_{3 \rightarrow 1} < 0$$

$$(2b) \quad T_2 = T_3 \quad (2e) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = W_{2 \rightarrow 3}$$

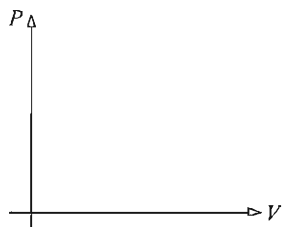
$$(1h) \quad T_1 < T_2 \quad (3g) \quad (U_1 - U_3) < 0$$



Problema 1.

Un gas ideal ($R = 0.3 \text{ kJ/kgK}$) que consta de 5 kg, experimenta los siguientes cambios: En forma isocórica su temperatura se triplica; luego, mediante un cambio isotérmico su presión se duplica y, finalmente mediante un proceso para el cual $\kappa = 1.5$, adquiere un volumen final de 9.0 m^3 .

a) Llenar la tabla, b) esbozar los procesos descritos en el plano P/V .



	P/kPa	V/m^3	T/K
κ			
1		6	600
2			
3			
4			

Datos: $m = 5 \text{ kg}$, $R = 0.3 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Se conoce el volumen y la temperatura en el estado 1, por lo que de la ecuación de estado de gas ideal determinamos la presión en el estado inicial:

$$a) \quad P_1 = \frac{mRT_1}{V_1} = \frac{(5 \text{ kg}) \left(0.3 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 \text{ K})}{(6 \text{ m}^3)} = 150 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 150 \text{ kPa}$$

El sistema pasa del estado 1 al 2, en forma isocórica en el cual su temperatura se triplica, lo que significa que:

$$b) \quad \kappa_{1 \rightarrow 2} = \infty, \quad c) \quad V_2 = V_1 = 6 \text{ m}^3, \quad d) \quad T_2 = 3T_1 = 1800 \text{ K}$$

De la ecuación de estado de gas ideal determinamos:

$$e) \quad P_2 = \frac{mRT_2}{V_2} = \frac{(5 \text{ kg}) \left(0.3 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (1800 \text{ K})}{(6 \text{ m}^3)} = 450 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 450 \text{ kPa}$$

Paso 2.

El sistema pasa del estado 2 al 3, mediante un cambio isotérmico, en el que su presión se duplica, lo que significa que:

a) $\kappa_{2 \rightarrow 3} = 1$, b) $T_3 = T_2 = 1800 \text{ K}$, c) $P_3 = 2P_2 = 900 \text{ kPa}$

De la ecuación de procesos politrópicos: $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, con $\kappa_{2 \rightarrow 3} = 1$ determinamos el volumen en el estado 3, esto es: $P_3 V_3 = P_2 V_2$, de donde:

$$d) \quad V_3 = \frac{P_2 V_2}{P_3} = \frac{(450 \text{ kPa})(6 \text{ m}^3)}{(900 \text{ kPa})} = 3 \text{ m}^3$$

Paso 3.

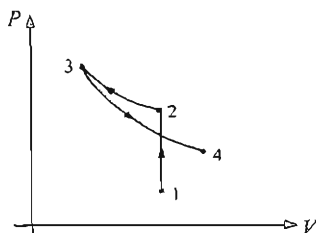
El sistema pasa del estado 3 al 4, mediante un proceso en el que $\kappa = 1.5$, hasta adquirir el volumen de 9 m^3 .

De la ecuación de procesos politrópicos $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, con $\kappa_{3 \rightarrow 4} = 1.5$, determinamos la presión en el estado 4, esto es: $P_4 V_4^{1.5} = P_3 V_3^{1.5}$, de donde

$$a) \quad P_4 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{1.5} = (900 \text{ kPa}) \left(\frac{3 \text{ m}^3}{9 \text{ m}^3} \right)^{1.5} = 173.20 \text{ kPa}$$

Finalmente, de la ecuación de estado de gas ideal determinamos la temperatura en el estado final:

$$b) \quad T_4 = \frac{P_4 V_4}{mR} = \frac{\left(173.20 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right) (9 \text{ m}^3)}{(5 \text{ kg}) \left(0.3 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)} = 1039.20 \frac{\text{kJ}}{\text{kJ}} = 1039.20 \text{ K}$$



		P/kPa	V/m ³	T/K
κ	1	<i>1a</i> 150	6	600
	<i>1b</i> ∞	<i>1e</i> 450	<i>1c</i> 6	<i>1d</i> 1800
<i>2a</i> 1	3	<i>2c</i> 900	<i>2d</i> 3	<i>2b</i> 1800
1.5	4	<i>3a</i> 173.2	9	<i>3b</i> 1039.2

Problema 2.

Un gas ideal efectúa los siguientes cambios: en forma isobárica pasa del estado 1 al 2, aumentando su energía interna en 250 kJ; llega al estado 3 al efectuarse un cambio adiabático, realizando el sistema un trabajo de 450 kJ; finalmente, a volumen constante llega al estado 4 absorbiendo 750 kJ de calor.

Sabiendo que el trabajo total realizado por el sistema es de 850 kJ, llenar los espacios vacíos en la tabla.

	ΔU / kJ	Q / kJ	W / kJ
1			
2			
3			
4			
total			

Solución:

Paso 1.

Durante el proceso (1→2), en forma isobárica la energía interna del sistema aumenta en 250 kJ, esto es

$$a) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 250 \text{ kJ}$$

Paso 2.

En forma adiabática el sistema pasa del estado 2 al 3, realizando el sistema un trabajo de 450 kJ, lo cual significa que

$$a) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = 0, \quad b) \quad W_{2 \rightarrow 3} = 450 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, se tiene

$$c) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = -W_{2 \rightarrow 3} = -(450 \text{ kJ}) = -450 \text{ kJ}$$

Paso 3.

El sistema pasa del estado 3 al 4 mediante un proceso a volumen constante, durante el cual el sistema absorbe 750 kJ de calor, por lo tanto:

$$a) \quad W_{3 \rightarrow 4} = 0, \quad b) \quad Q_{3 \rightarrow 4} = 750 \text{ kJ}$$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4}$, se tiene que:

$$c) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} = 750 \text{ kJ}$$

Paso 4.

Se sabe que el trabajo total realizado por el sistema sobre los alrededores es de 850 kJ, por lo que:

$$a) \quad W_{total} = 850 \text{ kJ}, \text{ y dado que: } W_{total} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4}, \text{ entonces,}$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = W_{total} - (W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4}); \text{ esto es que:}$$

$$b) \quad W_{1 \rightarrow 2} = (850 \text{ kJ}) - (450 + 0) \text{ kJ} = 400 \text{ kJ}$$

Paso 5.

Aplicando la ecuación de 1ª Ley al proceso (1→2): $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, resulta que,

$$a) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + W_{1 \rightarrow 2} = (250 + 400) \text{ kJ} = 650 \text{ kJ}$$

Paso 6.

Finalmente la variación total en la energía interna es,

$$a) \quad \Delta U_{total} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 4} = (250 - 450 + 750) \text{ kJ} = 550 \text{ kJ}$$

y el calor total intercambiado entre el sistema y los alrededores es

$$b) \quad Q_{total} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} = (650 + 0 + 750) \text{ kJ} = 1400 \text{ kJ}$$

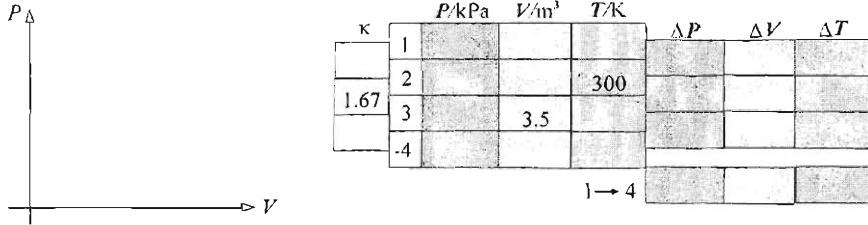
	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ
1	<i>1a</i> 250	<i>5a</i> 650	<i>4b</i> 400
2	<i>2c</i> -450	<i>2a</i> 0	<i>2b</i> 450
3	<i>3c</i> 750	<i>3b</i> 750	<i>3a</i> 0
4			
total	<i>6a</i> 550	<i>6b</i> 1400	<i>4a</i> 850

Problema 1.

Un sistema que consta de 2 kg de helio, inicialmente a 450 K y 12.5 m³ se ve sujeto a los siguientes cambios:

Pasa del estado 1 al 2 en forma isobárica; llega al estado 3 mediante un cambio isentrópico; finalmente, en forma isotérmica adquiere la presión inicial.

a) Llenar la tabla, b) esbozar los procesos descritos en el plano P - V .



Datos: $m = 2$ kg, $R = 2.08$ kJ/kgK

Solución:

Paso 1.

Se conoce el volumen y la temperatura en el estado inicial 1, por lo que de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos

$$a) \quad P_1 = \frac{mRT_1}{V_1} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (450 \text{ K})}{(12.5 \text{ m}^3)} = 149.76 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 149.76 \text{ kPa}$$

El proceso (1→2) es isobárico, por lo que:

$$b) \quad \kappa_{1 \rightarrow 2} = 0, \quad c) \quad P_2 = P_1 = 149.76 \text{ kPa}, \quad d) \quad \Delta P_{1 \rightarrow 2} = 0$$

De la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ resulta que

$$e) \quad V_2 = \frac{mRT_2}{P_2} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 \text{ K})}{(149.76 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3})} = 8.33 \frac{\text{kJ}}{\text{kJ}} = 8.33 \text{ m}^3$$

Calculamos la variación en el volumen y la temperatura durante este proceso:

$$f) \Delta V_{1 \rightarrow 2} = V_2 - V_1 = (8.33 - 12.5) \text{ m}^3 = -4.17 \text{ m}^3$$

$$g) \Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 = (300 - 450) \text{ K} = -150 \text{ K}$$

Paso 2.

Para el proceso isoentrópico (2→3), de la ecuación de procesos politrópicos: $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, con $\kappa = 1.67$ determinamos la presión en el estado 3, esto es: $P_3 V_3^{1.67} = P_2 V_2^{1.67}$, de donde:

$$a) P_3 = P_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{1.67} = (149.76 \text{ kPa}) \left(\frac{8.33 \text{ m}^3}{3.5 \text{ m}^3} \right)^{1.67} = 637.20 \text{ kPa}$$

Aplicando la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos:

$$b) T_3 = \frac{P_3 V_3}{mR} = \frac{\left(637.20 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right) (3.5 \text{ m}^3)}{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)} = 536.10 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 536.10 \text{ K}$$

Calculamos la variación en las variables termodinámicas presión, volumen y temperatura durante este proceso:

$$c) \Delta P_{2 \rightarrow 3} = P_3 - P_2 = (637.20 - 149.76) \text{ kPa} = 487.44 \text{ kPa}$$

$$d) \Delta V_{2 \rightarrow 3} = V_3 - V_2 = (3.5 - 8.33) \text{ m}^3 = -4.83 \text{ m}^3$$

$$e) \Delta T_{2 \rightarrow 3} = T_3 - T_2 = (536.10 - 300) \text{ K} = 236.10 \text{ K}$$

Paso 3.

En forma isotérmica, el sistema pasa del estado 3 al 4 hasta adquirir la presión inicial; lo cual significa que:

$$a) \kappa_{3 \rightarrow 4} = 1, \quad b) T_4 = T_3 = 536.10 \text{ K}, \quad c) \Delta T_{3 \rightarrow 4} = 0, \quad d) P_4 = P_1 = 149.76 \text{ kPa}$$

$$e) \Delta P_{1 \rightarrow 4} = 0$$

De la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ resulta,

$$f) \quad V_4 = \frac{mRT_4}{P_4} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (536.10 \text{ K})}{\left(149.76 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 14.89 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 14.89 \text{ m}^3$$

La variación en las variables termodinámicas presión y volumen durante este proceso:

$$g) \quad \Delta P_{3 \rightarrow 4} = P_4 - P_3 = (149.76 - 637.20) \text{ kPa} = -487.44 \text{ kPa}$$

$$h) \quad \Delta V_{3 \rightarrow 4} = V_4 - V_3 = (14.89 - 3.5) \text{ m}^3 = 11.39 \text{ m}^3$$

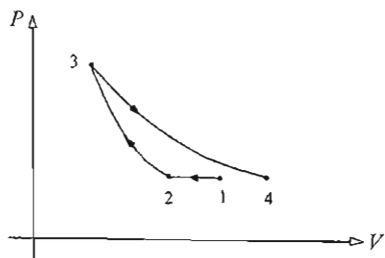
Paso 4.

Finalmente calculamos la variación total en las variables volumen y temperatura

$$a) \quad \Delta V_{total} = \Delta V_{1 \rightarrow 2} + \Delta V_{2 \rightarrow 3} + \Delta V_{3 \rightarrow 4} = (-4.17 - 4.83 + 11.39) \text{ m}^3 = 2.39 \text{ m}^3$$

$$b) \quad \Delta T_{total} = \Delta T_{1 \rightarrow 2} + \Delta T_{2 \rightarrow 3} + \Delta T_{3 \rightarrow 4} = (-150 + 236.1 + 0) \text{ K} = 86.10 \text{ K}$$

		P/kPa	V/m^3	T/K	ΔP	ΔV	ΔT
1b 0	1	1a 149.76	12.5	450	1d 0	1f -4.17	1g -150
	2	1c 149.76	8.33	300	2c -487.44	2d -4.83	2e 236.1
1.67	3	2a 637.20	3.5	2b 536.1	3g -487.44	3h 11.39	3e 0
3a 1	4	3d 149.76	3f 14.89	3b 536.1			
1 → 4					3e 0	4a 2.39	4b 86.1



Problema 2.

Un gas ideal ($C_v' = 15 \text{ kJ/K}$) efectúa los siguientes cambios: en forma isocórica pasa del estado 1 al 2 cediendo 600 kJ de calor; llega al estado 3 en forma isobárica, disminuyendo su energía interna en 300 kJ; finalmente, mediante un cambio adiabático realiza un trabajo de 300 kJ.

Si el trabajo total realizado por los alrededores sobre el sistema es de 1200 kJ, llenar la siguiente tabla.

T/K		$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ
	1			
	2			
	3			
400	4			
	1 \rightarrow 4			

Datos: ($C_v' = 15 \text{ kJ/K}$)

Solución:

Paso 1.

El proceso (1 \rightarrow 2) es isocórico en el que el sistema cede 600 kJ de calor, lo que significa:

a) $W_{1\rightarrow 2} = 0$, b) $Q_{1\rightarrow 2} = - 600 \text{ kJ}$

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{1\rightarrow 2} = Q_{1\rightarrow 2} - W_{1\rightarrow 2}$, se tiene que,

c) $\Delta U_{1\rightarrow 2} = Q_{1\rightarrow 2} = - 600 \text{ kJ}$

Paso 2.

El proceso (2 \rightarrow 3) es isobárico en el que la energía interna del sistema disminuye en 300 kJ , por lo que

a) $\Delta U_{2\rightarrow 3} = - 300 \text{ kJ}$

Paso 3.

Mediante un proceso adiabático el sistema llega al estado 4, realizando un trabajo de 300 kJ , luego entonces:

a) $Q_{3\rightarrow 4} = 0$, b) $W_{3\rightarrow 4} = 300 \text{ kJ}$

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4}$, se tiene que

$$c) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 4} = -W_{3 \rightarrow 4} = -(300 \text{ kJ}) = -300 \text{ kJ}$$

Paso 4.

El trabajo total realizado por los alrededores sobre el sistema es de 1200 kJ, por lo tanto:

$$a) \quad W_{1 \rightarrow 4} = -1200 \text{ kJ}$$

y dado que $W_{1 \rightarrow 4} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4}$, entonces

$$b) \quad W_{2 \rightarrow 3} = W_{1 \rightarrow 4} - (W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4}) = (-1200 \text{ kJ}) - (0 + 300) \text{ kJ} = -1500 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley al proceso (2→3): $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, se tiene

$$c) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} + W_{2 \rightarrow 3} = (-300 - 1500) \text{ kJ} = -1800 \text{ kJ}$$

Paso 5.

La variación total en la energía interna del sistema, así como el calor total intercambiado entre el sistema y los alrededores los obtenemos sumando los correspondientes valores debidos a cada uno de los tres procesos, esto es:

$$a) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 4} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 4} = (-600 - 300 - 300) \text{ kJ} = -1200 \text{ kJ}$$

$$b) \quad Q_{1 \rightarrow 4} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} = (-600 - 1800 + 0) \text{ kJ} = -2400 \text{ kJ}$$

De la relación $\Delta U = C_v \Delta T$, se tiene que: $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = C_v (T_4 - T_3)$,

de donde $\frac{\Delta U_{3 \rightarrow 4}}{C_v} = (T_4 - T_3)$; por lo tanto

$$c) \quad T_3 = T_4 - \frac{\Delta U_{3 \rightarrow 4}}{C_V} = (400 \text{ K}) - \frac{(-300 \text{ kJ})}{15 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 420 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 420 \text{ K}$$

Analogamente,

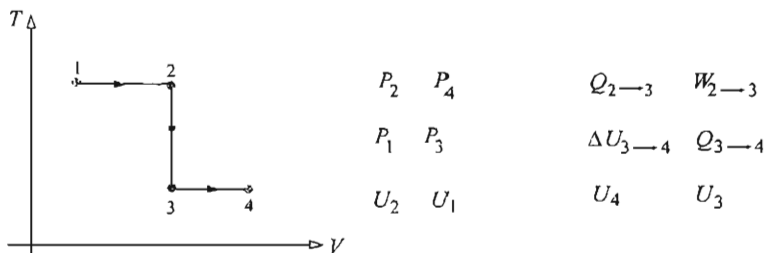
$$d) \quad T_2 = T_3 - \frac{\Delta U_{2 \rightarrow 3}}{C_V} = (420 \text{ K}) - \frac{(-300 \text{ kJ})}{15 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 440 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 440 \text{ K}$$

$$e) \quad T_1 = T_2 - \frac{\Delta U_{1 \rightarrow 2}}{C_V} = (440 \text{ K}) - \frac{(-600 \text{ kJ})}{15 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 480 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 480 \text{ K}$$

T/K		$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ
s_e 480	1	$1c$ - 600	$1b$ - 600	$1a$ 0
s_d 440	2	$2a$ - 300	$2c$ - 1800	$2b$ - 1500
s_c 420	3	$3c$ - 300	$3a$ 0	$3b$ 300
400	1			
$1 \rightarrow 4$		$5a$ - 1200	$5b$ - 2400	$4a$ - 1200

Problema 3.

Un gas ideal realiza los procesos politrópicos mostrados en el plano VT . a) Esbozar el diagrama de los tres procesos en el plano VP , b) indicar el signo de Q , W y ΔU para cada proceso, c) indicar la relación existente entre los parámetros que se dan a la derecha del diagrama mediante los signos ($>$, $=$, $<$).



Solución:

Paso 1.

El diagrama muestra que el proceso ($1 \rightarrow 2$) es una expansión isotérmica por lo que,

a) $T_2 = T_1$, b) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$, de donde: c) $U_2 = U_1$

d) $V_2 > V_1$, e) $W_{1 \rightarrow 2} > 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$, resulta que

f) $Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}$, y de acuerdo con el inciso (e) resulta que: g) $Q_{1 \rightarrow 2} > 0$

Este proceso se representa en el plano VP mediante una curva tipo hipérbola en la que dado que el volumen aumenta, la presión disminuye; esto es,

h) $P_2 < P_1$

Paso 2.

El proceso ($2 \rightarrow 3$) es isocórico y se caracteriza por:

a) $V_3 = V_2$, b) $W_{2 \rightarrow 3} = 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, se tiene que:

c) $Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3}$

El proceso se representa en el plano VP mediante una recta paralela al eje de la presión, en la que, dado que la temperatura disminuye d) $T_3 < T_2$, la presión disminuye también

esto es que $e) P_3 < P_2$

Como $f) \Delta T_{2 \rightarrow 3} < 0$, entonces $g) \Delta U_{2 \rightarrow 3} < 0$; por lo tanto

$h) U_3 < U_2$ y por el resultado del inciso (c) se tiene que, $i) Q_{2 \rightarrow 3} < 0$

Paso 3.

El diagrama muestra que el proceso (3→4) es una expansión isotérmica luego entonces,

$a) T_4 = T_3$, $b) \Delta U_{3 \rightarrow 4} = 0$, de donde: $c) U_4 = U_3$

$d) V_4 > V_3$, $e) W_{3 \rightarrow 4} > 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4} = 0$, resulta que

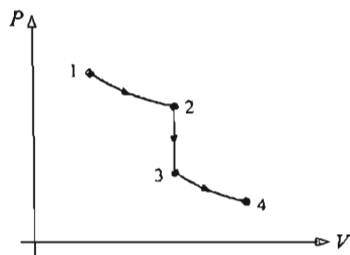
$f) Q_{3 \rightarrow 4} = W_{3 \rightarrow 4}$, y de acuerdo con el inciso (e) resulta que: $g) Q_{3 \rightarrow 4} > 0$

Este proceso se representa en el plano VP mediante una curva tipo hipérbola en la que dado que el volumen aumenta, la presión disminuye; esto es que $h) P_4 < P_3$

Paso 4.

Se ilustran los tres procesos en el plano VP en el que se observa que

$a) P_2 > P_4$, $b) P_1 > P_3$



$$(4a) \quad P_2 > P_4$$

$$(3f) \quad Q_{3 \rightarrow 4} = W_{3 \rightarrow 4}$$

$$(4b) \quad P_1 > P_3$$

$$(2c) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$(1c) \quad U_2 = U_1$$

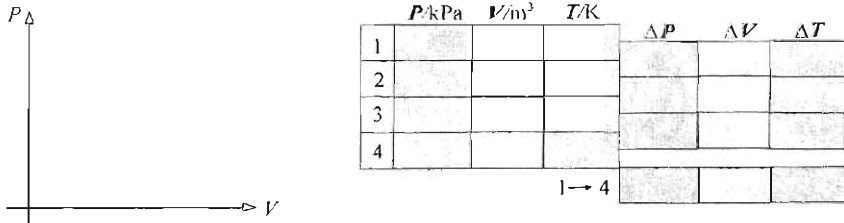
$$(3c) \quad U_4 = U_3$$

Problema 1.

Un sistema que consta de 2 kg de helio, inicialmente a 700 K y 4 m³ efectúa los cambios que se describen a continuación:

Cambio	κ	Condiciones
1→2	1.4	disminuye su presión en 300 kPa
2→3	∞	aumenta su temperatura en 50 K
3→4	0	$V_4 = V_1$

a) Llenar los espacios vacíos en la tabla, b) esbozar el diagrama de los tres procesos en el plano P - V .



Datos: $m = 2$ kg, $R = 2.08$ kJ/kgK, $C_v = 3.12$ kJ/kgK

Solución:

Paso 1.

Se conoce el volumen y la temperatura en el estado inicial 1, por lo que de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos:

$$a) \quad P_1 = \frac{mRT_1}{V_1} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (700 \text{ K})}{(4 \text{ m}^3)} = 728 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 728 \text{ kPa}$$

El sistema pasa del estado 1 al 2 mediante un proceso politrópico en el que $\kappa = 1.4$ disminuyendo su presión en 300 kPa, esto es que,

$$b) \quad \Delta P_{1 \rightarrow 2} = P_2 - P_1 = -300 \text{ kPa}, \text{ de donde:}$$

$$c) \quad P_2 = P_1 + \Delta P_{1 \rightarrow 2} = (728 - 300) \text{ kPa} = 428 \text{ kPa}$$

De la ecuación de procesos politrópicos: $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, con $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 1.4$ determinamos el volumen en el estado 2, esto es: $P_2 V_2^{1.4} = P_1 V_1^{1.4}$, así que,

$$d) \quad V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{1/1.4} = (4 \text{ m}^3) \left(\frac{728 \text{ kPa}}{428 \text{ kPa}} \right)^{1/1.4} = 5.84 \text{ m}^3$$

Aplicando la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ se obtiene

$$e) \quad T_2 = \frac{P_2 V_2}{mR} = \frac{\left(428 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right) (5.84 \text{ m}^3)}{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)} = 600.85 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 600.85 \text{ K}$$

Paso 2.

El proceso (2→3) es isocórico en el que la temperatura del sistema aumenta en 50 K, lo cual significa

$$a) \quad V_3 = V_2 = 5.84 \text{ m}^3, \quad b) \quad \Delta V_{2 \rightarrow 3} = 0$$

$$c) \quad \Delta T_{2 \rightarrow 3} = T_3 - T_2 = 50 \text{ K}, \text{ de donde:}$$

$$d) \quad T_3 = T_2 + \Delta T_{2 \rightarrow 3} = (600.85 + 50) \text{ K} = 650.85 \text{ K}$$

De la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ obtenemos:

$$e) \quad P_3 = \frac{mRT_3}{V_3} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (650.85 \text{ K})}{(5.84 \text{ m}^3)} = 463.62 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 463.62 \text{ kPa}$$

Paso 3.

En el proceso isobárico (3→4) el sistema adquiere el volumen inicial, por lo que:

$$a) \quad P_4 = P_3 = 463.62 \text{ kPa}, \quad b) \quad \Delta P_{3 \rightarrow 4} = 0, \quad c) \quad V_4 = V_1 = 4 \text{ m}^3$$

y de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ resulta que

$$d) T_4 = \frac{P_4 V_4}{m R} = \frac{\left(463.62 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right) (4 \text{ m}^3)}{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}\right)} = 445.79 \frac{\text{kJ}}{\text{kJ/K}} = 445.79 \text{ K}$$

Paso 4.

Determinamos la variación en las variables termodinámicas debida a cada uno de los procesos

$$a) \Delta V_{1 \rightarrow 2} = V_2 - V_1 = 1.84 \text{ m}^3$$

$$b) \Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 = -99.15 \text{ K}$$

$$c) \Delta P_{2 \rightarrow 3} = P_3 - P_2 = 35.62 \text{ kPa}$$

$$d) \Delta V_{1 \rightarrow 4} = V_4 - V_1 = -1.84 \text{ m}^3$$

$$e) \Delta T_{1 \rightarrow 4} = T_4 - T_1 = -205.06 \text{ K}$$

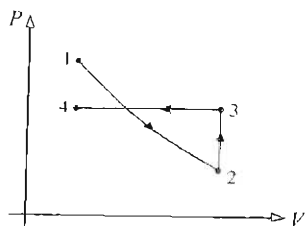
Paso 4.

La variación total en las variables presión, volumen y temperatura:

$$a) \Delta P_{total} = \Delta P_{1 \rightarrow 2} + \Delta P_{2 \rightarrow 3} + \Delta P_{3 \rightarrow 4} = -264.38 \text{ kPa}$$

$$b) \Delta V_{total} = \Delta V_{1 \rightarrow 2} + \Delta V_{2 \rightarrow 3} + \Delta V_{3 \rightarrow 4} = 0$$

$$c) \Delta T_{total} = \Delta T_{1 \rightarrow 2} + \Delta T_{2 \rightarrow 3} + \Delta T_{3 \rightarrow 4} = -254.21 \text{ K}$$



		P/kPa	V/m^3	T/K	ΔP	ΔV	ΔT
1	1a	728	4	700	1b -300	4a 1.84	4b -99.15
2	1c	428	5.84	600.85	4c 35.62	2b 0	2c 50
3	2e	463.62	5.84	650.85	3b 0	4d -1.84	4e -205.06
4	3a	463.62	4	445.79	5a -264.38	5b 0	5c -254.21
1 → 4							

Problema 2.

Un gas ideal experimenta los cambios siguientes: mediante un proceso isotérmico pasa del estado 1 al 2, realizando los alrededores sobre el sistema un trabajo de 800 kJ; a volumen constante, llega al estado 3 cediendo 400 kJ de calor; finalmente, en forma isobárica alcanza el estado 4 aumentando su energía interna en 200 kJ.

Si el calor total cedido por el sistema es de 600 kJ, llenar los espacios vacíos en la tabla.

	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ
1			
2			
3			
4			
total			

Solución:

Paso 1.

El sistema pasa del estado 1 al 2 en forma isotérmica, en el que los alrededores realizan un trabajo de 800 kJ sobre el sistema, es decir que,

a) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$, b) $W_{1 \rightarrow 2} = - 800 \text{ kJ}$

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$, se tiene que

c) $Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2} = - 800 \text{ kJ}$

Paso 2.

El sistema pasa del estado 2 al 3 mediante un proceso a volumen constante, durante el cual el sistema cede 400 kJ de calor, por lo tanto:

a) $W_{2 \rightarrow 3} = 0$, b) $Q_{2 \rightarrow 3} = - 400 \text{ kJ}$

De la ecuación de la 1ª Ley, $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$: se tiene que

c) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} = - 400 \text{ kJ}$

Paso 3.

Durante el proceso (3→4), en forma isobárica la energía interna del sistema aumenta en 200 kJ, esto es:

a) $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = 200 \text{ kJ}$

Paso 4.

Se sabe que el calor total cedido por el sistema es de 600 kJ, lo que significa que:

a) $Q_{total} = -600 \text{ kJ}$,

y dado que $Q_{total} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4}$, entonces,

b) $Q_{3 \rightarrow 4} = Q_{total} - (Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3}) = (-600 \text{ kJ}) - (-800 - 400) \text{ kJ} = 600 \text{ kJ}$

Paso 5.

Aplicando la ecuación de 1ª Ley al proceso (3→4), $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4}$, resulta

a) $W_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - \Delta U_{3 \rightarrow 4} = (600 - 200) \text{ kJ} = 400 \text{ kJ}$

Finalmente,

b) $\Delta U_{total} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 4} = (0 - 400 + 200) \text{ kJ} = -200 \text{ kJ}$

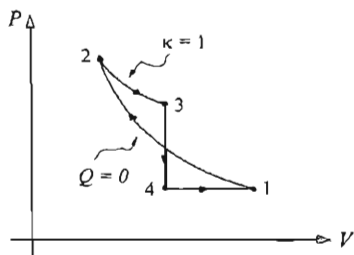
c) $W_{total} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} = (-800 + 0 + 400) \text{ kJ} = -400 \text{ kJ}$

	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ
1	$1a$ 0	$1c$ -800	$1b$ -800
2	$2c$ -400	$2b$ -400	$2a$ 0
3	$3a$ 200	$4b$ 600	$5a$ 400
4			
total	$5b$ -200	$4a$ -600	$5c$ -400

Problema 3.

Un gas ideal efectúa los cambios mostrados en el plano VP .

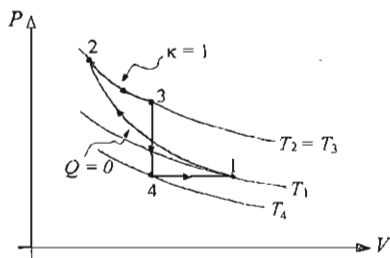
Indicar la relación existente entre los parámetros que se dan a la derecha del diagrama mediante los signos ($>$, $=$, $<$). (Justifique en cada caso su respuesta).



$W_{1 \rightarrow 2}$	0	T_2	T_3
$\Delta U_{2 \rightarrow 3}$	0	T_1	T_4
$Q_{3 \rightarrow 4}$	$\Delta U_{3 \rightarrow 4}$	V_3	V_4
$W_{4 \rightarrow 1}$	$Q_{4 \rightarrow 1}$	P_4	P_1
$Q_{3 \rightarrow 4}$	0	T_4	T_3

Solución:

El diagrama VP nos da la información explícita de como cambian las variables termodinámicas P y V debido a cada proceso; la variación en la variable temperatura la podemos también inferir directamente del diagrama trazando curvas de temperatura constante (isotermas) pasando por los estados 1 y 4 las cuales son paralelas a la curva de temperatura constante que une a los estados 2 y 3, de forma tal que, como se muestra en el diagrama inferior ($T_2 = T_3$) $>$ $T_1 >$ T_4 .



También del diagrama VP se infiere directamente el signo o valor del trabajo, W ya que este último se interpreta como el área bajo la curva que une cada pareja de estados termodinámicos y está definido como $W_{i \rightarrow f} = \int_i^f P dV$; por lo que comparando el volumen final con el inicial podemos saber el signo o el valor numérico de W .

El signo o el valor numérico de la variación de la energía interna, ΔU lo obtenemos, para cada proceso, de la relación $\Delta U = m C_V \Delta T$, esto es, directamente a través del signo de $\Delta T = T_f - T_i$.

Finalmente, de la ecuación que caracteriza a la Primera Ley de la Termodinámica $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, encontramos la relación entre estas tres cantidades, dependiendo de las características de cada proceso.

Todo esto se detalla a continuación:

Paso 1.

El proceso (1→2) es *adiabático* y tiene las siguientes características:

- a) $P_2 > P_1$, b) $V_2 < V_1$, c) $W_{1 \rightarrow 2} < 0$, d) $T_2 > T_1$, e) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} > 0$,
f) $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, resulta

g) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2}$

Paso 2.

El proceso (2→3) es *isotérmico* y se caracteriza por:

- a) $P_3 < P_2$, b) $V_3 > V_2$, c) $W_{2 \rightarrow 3} > 0$, d) $T_3 = T_2$, e) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3} = 0$, resulta que,

f) $Q_{2 \rightarrow 3} = W_{2 \rightarrow 3}$

Paso 3.

El proceso (3→4) es *isocórico* y tiene las siguientes características:

- a) $P_4 < P_3$, b) $V_4 = V_3$, c) $W_{3 \rightarrow 4} = 0$, d) $T_4 < T_3$, e) $\Delta U_{3 \rightarrow 4} < 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4}$:

f) $Q_{3 \rightarrow 4} = \Delta U_{3 \rightarrow 4}$ y dado que $\Delta U_{3 \rightarrow 4} < 0$, entonces: g) $Q_{3 \rightarrow 4} < 0$

Paso 4.

El proceso (4→1) es *isobárico* y se caracteriza por:

- a) $P_1 = P_4$, b) $V_1 > V_4$, c) $W_{4 \rightarrow 1} > 0$, d) $T_1 > T_4$, e) $\Delta U_{4 \rightarrow 1} > 0$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{4 \rightarrow 1} = Q_{4 \rightarrow 1} - W_{4 \rightarrow 1}$, resulta que

$$f) Q_{4 \rightarrow 1} = \Delta U_{4 \rightarrow 1} + W_{4 \rightarrow 1}$$

Para este proceso se tiene que de la definición de trabajo $W_{i \rightarrow f} = \int_i^f P dV = \int_i^f mRdT$, de donde

$$g) W_{4 \rightarrow 1} = mR\Delta T_{4 \rightarrow 1};$$

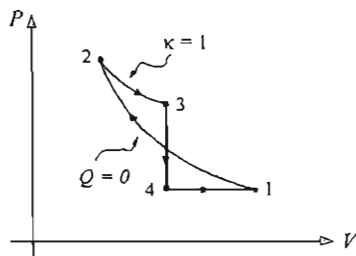
Por otro lado se sabe que $\Delta U_{4 \rightarrow 1} = mC_v \Delta T_{4 \rightarrow 1}$ y del inciso (f) se tiene que:

$$Q_{4 \rightarrow 1} = \Delta U_{4 \rightarrow 1} + W_{4 \rightarrow 1}, \text{ por lo tanto,}$$

$$h) Q_{4 \rightarrow 1} = mC_v \Delta T_{4 \rightarrow 1} + mR\Delta T_{4 \rightarrow 1} = m(C_v + R)\Delta T_{4 \rightarrow 1}$$

De la comparación de los incisos (g) y (h), se concluye que:

$$i) W_{4 \rightarrow 1} < Q_{4 \rightarrow 1} \text{ dado que } (C_v + R) > R$$



$$(1c) \quad W_{1 \rightarrow 2} < 0$$

$$(2d) \quad T_2 = T_3$$

$$(2e) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0$$

$$(4d) \quad T_1 > T_4$$

$$(3f) \quad Q_{3 \rightarrow 4} = \Delta U_{3 \rightarrow 4}$$

$$(3b) \quad V_3 = V_4$$

$$(4i) \quad W_{4 \rightarrow 1} < Q_{4 \rightarrow 1}$$

$$(4a) \quad P_4 = P_1$$

$$(3g) \quad Q_{3 \rightarrow 4} < 0$$

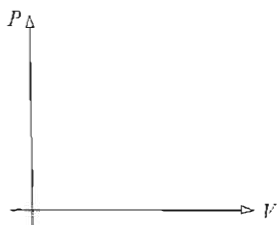
$$(3d) \quad T_4 < T_3$$

Problema 1.

Un sistema que consta de 2 kg de helio, inicialmente a 640 kPa y 4 m³ experimenta los cambios que se describen a continuación:

Cambio	κ	Condiciones
1→2	1.7	disminuye su presión en 328 kPa
2→3	1	disminuye su volumen a 4 m ³
3→4	∞	aumenta su temperatura a 675 K

a) Llenar los espacios vacíos en la tabla, b) esbozar los tres procesos en el plano VP.



	P/kPa	V/m ³	T/K	ΔP	ΔV	ΔT
1						
2						
3						
4						
total						

Datos: $m = 2$ kg, $R = 2.08$ kJ/kgK, $C_V = 3.12$ kJ/kgK

Solución:

Paso 1.

Se conoce el volumen y la presión en el estado inicial, por lo que de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos:

$$a) \quad T_1 = \frac{P_1 V_1}{mR} = \frac{\left(640 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right) \left(4 \text{ m}^3\right)}{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)} = 615.38 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 615.38 \text{ K}$$

El sistema pasa del estado 1 al 2 mediante un proceso politrópico en el que $\kappa = 1.7$, disminuyendo su presión en 328 kPa; esto es que:

$$b) \quad \Delta P_{1 \rightarrow 2} = P_2 - P_1 = -328 \text{ kPa}; \text{ de donde:}$$

$$c) \quad P_2 = P_1 + \Delta P_{1 \rightarrow 2} = (640 - 328) \text{ kPa} = 312 \text{ kPa}$$

De la ecuación de procesos politrópicos: $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, con $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 1.7$, determinamos el volumen en el estado 2, esto es: $P_2 V_2^{1.7} = P_1 V_1^{1.7}$, de donde

$$d) V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{1/1.7} = (4 \text{ m}^3) \left(\frac{640 \text{ kPa}}{312 \text{ kPa}} \right)^{1/1.7} = 6.10 \text{ m}^3$$

Aplicando la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ se obtiene

$$e) T_2 = \frac{P_2 V_2}{mR} = \frac{\left(312 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right) (6.10 \text{ m}^3)}{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)} = 457.50 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 457.50 \text{ K}$$

Paso 2.

El proceso (2→3) es isotérmico en el que el volumen del sistema disminuye a 4 m^3 , lo cual significa que:

$$a) T_3 = T_2 = 457.50 \text{ K}, \quad b) \Delta T_{2 \rightarrow 3} = 0, \quad c) V_3 = V_1 = 4 \text{ m}^3$$

De la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos:

$$d) P_3 = \frac{mRT_3}{V_3} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (457.50 \text{ K})}{(4 \text{ m}^3)} = 475.80 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 475.80 \text{ kPa}$$

Paso 3.

En el proceso isocórico (3→4) el sistema aumenta su temperatura a 675 K , por lo que:

$$a) V_4 = V_3 = V_1 = 4 \text{ m}^3, \quad b) \Delta V_{3 \rightarrow 4} = 0, \quad c) \Delta V_{1 \rightarrow 4} = 0, \quad d) T_4 = 675 \text{ K}$$

y de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ resulta que

$$e) P_4 = \frac{mRT_4}{V_4} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (675 \text{ K})}{(4 \text{ m}^3)} = 702 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 702 \text{ kPa}$$

Paso 4.

Determinamos la variación en las variables termodinámicas debida a cada uno de los procesos:

$$a) \Delta V_{1 \rightarrow 2} = V_2 - V_1 = 2.10 \text{ m}^3$$

$$b) \Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 = -157.88 \text{ K}$$

$$c) \Delta P_{2 \rightarrow 3} = P_3 - P_2 = 163.80 \text{ kPa}$$

$$d) \Delta V_{3 \rightarrow 4} = V_4 - V_3 = -2.10 \text{ m}^3$$

$$e) \Delta P_{3 \rightarrow 4} = P_4 - P_3 = 226.60 \text{ kPa}$$

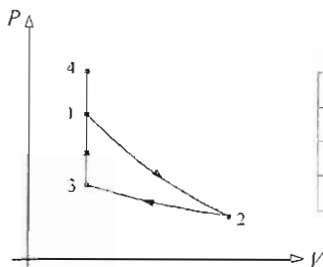
$$f) \Delta T_{3 \rightarrow 4} = T_4 - T_3 = 217.50 \text{ K}$$

Paso 5.

La variación total en las variables presión y temperatura:

$$a) \Delta P_{total} = \Delta P_{1 \rightarrow 2} + \Delta P_{2 \rightarrow 3} + \Delta P_{3 \rightarrow 4} = 62.0 \text{ kPa}$$

$$b) \Delta T_{total} = \Delta T_{1 \rightarrow 2} + \Delta T_{2 \rightarrow 3} + \Delta T_{3 \rightarrow 4} = 59.62 \text{ K}$$



	P/kPa	V/m^3	T/K	ΔP	ΔV	ΔT
1	640	4	1a 615.38	1b -328	4a 2.1	4b -157.88
2	1c 312	1d 6.1	1e 457.50	4c 163.8	4d -2.1	2b 0
3	2d 475.80	2c 4	2a 457.50	4e 226.2	3b 0	4f 217.50
4	3e 702	3a 4	3d 675	5a 62	3c 0	5b 59.62
total						

Problema 2.

Un gas ideal efectúa los cambios que se describen a continuación: mediante un proceso isotérmico pasa del estado 1 al 2, absorbiendo los alrededores 1200 kJ de calor; en forma adiabática llega al estado 3, disminuyendo su energía interna en 600 kJ; finalmente, en forma isobárica alcanza al estado 4, realizando los alrededores sobre el sistema un trabajo de 800 kJ.

Sabiendo que la energía interna total del sistema disminuye en 850 kJ, llenar los espacios vacíos en la tabla.

	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ
1			
2			
3			
4			
1 \rightarrow 4			

Solución:

Paso 1.

El sistema pasa del estado 1 al 2 en forma isotérmica, en el que los alrededores absorben 1200 kJ de calor, es decir que

a) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$, b) $Q_{1 \rightarrow 2} = -1200 \text{ kJ}$ ya que este es un calor cedido por el sistema

Aplicando la ecuación de la 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$, se tiene,

c) $W_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} = -1200 \text{ kJ}$

Paso 2.

El sistema pasa del estado 2 al 3 mediante un proceso adiabático, durante el cual la energía interna del sistema disminuye en 600 kJ, por lo tanto:

a) $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$, b) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -600 \text{ kJ}$

De la ecuación de la 1ª Ley, $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$,

c) $W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(-600 \text{ kJ}) = 600 \text{ kJ}$

Paso 3.

Durante el proceso (3 \rightarrow 4), en forma isobárica los alrededores realizan un trabajo de 800 kJ sobre el sistema. esto es:

$$a) \quad W_{3 \rightarrow 4} = -800 \text{ kJ}$$

Paso 4.

Se sabe que la energía interna total del sistema disminuye en 850 kJ, esto es

$$a) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 4} = -850 \text{ kJ}$$

y dado que $\Delta U_{1 \rightarrow 4} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 4}$, entonces.

$$b) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 4} = \Delta U_{1 \rightarrow 4} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3}) = (-850 \text{ kJ}) - (0 - 600) \text{ kJ} = -250 \text{ kJ}$$

Paso 5.

Aplicando la ecuación de 1ª Ley al proceso (3→4): $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} + W_{3 \rightarrow 4}$, resulta que.

$$a) \quad Q_{3 \rightarrow 4} = W_{3 \rightarrow 4} + \Delta U_{3 \rightarrow 4} = (-800 - 250) \text{ kJ} = -1050 \text{ kJ}$$

Finalmente

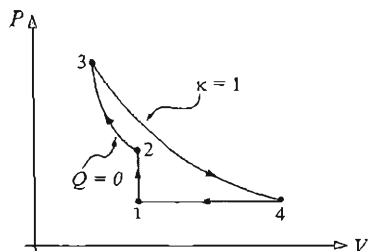
$$b) \quad Q_{total} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} = (-1200 + 0 - 1050) \text{ kJ} = -2250 \text{ kJ}$$

$$c) \quad W_{total} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} = (-1200 + 600 - 800) \text{ kJ} = -1400 \text{ kJ}$$

	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ
1	1a 0	1b -1200	1c -1200
2	2b -600	2a 0	2c 600
3	3b -250	3a -1050	3c -800
4			
1 → 4	4a -850	5b -2250	5c -1400

Problema 3.

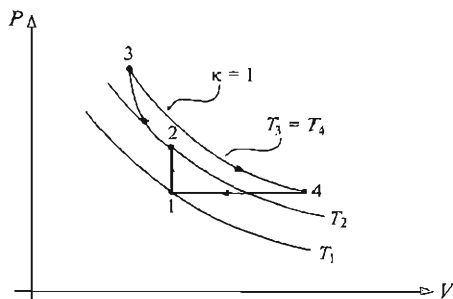
Un gas ideal efectúa los procesos politrópicos ilustrados en el plano VP . Indicar la relación existente entre los parámetros que se dan a la derecha del diagrama mediante los signos ($>$, $=$, $<$). (Justifique en cada caso su respuesta).



$\Delta U_{2 \rightarrow 3}$	0	T_4	T_1
$Q_{1 \rightarrow 2}$	0	T_2	T_4
$W_{4 \rightarrow 1}$	$Q_{4 \rightarrow 1}$	T_3	T_1
$Q_{3 \rightarrow 4}$	0	T_4	T_3
U_3	U_4	T_1	T_2

Solución:

El diagrama VP nos da la información explícita de cómo cambian las variables termodinámicas P y V debido a cada proceso; la variación en la variable temperatura la podemos también inferir directamente del diagrama trazando curvas de temperatura constante (isotermas) pasando por los estados 1 y 2 las cuales son paralelas a la curva de temperatura constante que une a los estados 3 y 4, de forma tal que, como se muestra en el diagrama inferior, $(T_3 = T_4) > T_2 > T_1$.



También del diagrama VP se infiere directamente el signo o valor del trabajo, W ya que este último se interpreta como el área bajo la curva que une cada pareja de estados termodinámicos y está definido como $W_{i \rightarrow f} = \int_i^f P dV$; por lo que comparando el volumen final con el inicial podemos saber el signo o el valor numérico de W .

El signo o el valor numérico de la variación de la energía interna, ΔU lo obtenemos, para cada proceso, de la relación $\Delta U = m C_V \Delta T$, esto es, directamente a través del signo de $\Delta T = T_f - T_i$.

Finalmente, de la ecuación que caracteriza a la Primera Ley de la Termodinámica: $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, encontramos la relación entre estas tres cantidades, dependiendo de las características de cada proceso.

Todo esto se detalla a continuación:

Paso 1.

El proceso (1 \rightarrow 2) es *isocórico* y tiene las siguientes características:

$$a) \quad P_2 > P_1, \quad b) \quad V_2 = V_1, \quad c) \quad W_{1 \rightarrow 2} = 0, \quad d) \quad T_2 > T_1, \quad e) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} > 0$$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, resulta que:

$$f) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} \text{ y dado que } \Delta U_{1 \rightarrow 2} > 0, \text{ entonces: } g) \quad Q_{1 \rightarrow 2} > 0$$

Paso 2.

El proceso (2 \rightarrow 3) es *adiabático* y se caracteriza por:

$$a) \quad P_3 > P_2, \quad b) \quad V_3 < V_2, \quad c) \quad W_{2 \rightarrow 3} < 0, \quad d) \quad T_3 > T_2, \quad e) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} > 0,$$

$$f) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = 0$$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, resulta que,

$$g) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = -W_{2 \rightarrow 3}$$

Paso 3.

El proceso (3 \rightarrow 4) es *isotérmico* y tiene las siguientes características:

$$a) \quad P_4 < P_3, \quad b) \quad V_4 > V_3, \quad c) \quad W_{3 \rightarrow 4} > 0, \quad d) \quad T_4 = T_3,$$

$$e) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 4} = 0 \text{ lo que implica que: } f) \quad U_3 = U_4$$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4} = 0$, resulta que:

$$g) \quad Q_{3 \rightarrow 4} = W_{3 \rightarrow 4} \text{ y como } W_{3 \rightarrow 4} > 0, \text{ entonces,}$$

$$h) \quad Q_{3 \rightarrow 4} > 0$$

Paso 4.

El proceso (4 \rightarrow 1) es *isobárico* y se caracteriza por:

$$a) P_1 = P_4, \quad b) V_1 < V_4, \quad c) W_{4 \rightarrow 1} < 0, \quad d) T_1 < T_4, \quad e) \Delta U_{4 \rightarrow 1} < 0$$

De la ecuación de la 1ª Ley $\Delta U_{4 \rightarrow 1} = Q_{4 \rightarrow 1} - W_{4 \rightarrow 1}$, resulta que

$$f) Q_{4 \rightarrow 1} = \Delta U_{4 \rightarrow 1} + W_{4 \rightarrow 1}$$

Para este proceso se tiene que de la definición de trabajo $W_{i \rightarrow j} = \int_i^j P dV = \int_i^j mRdT$, de donde,

$$g) W_{4 \rightarrow 1} = mR\Delta T_{4 \rightarrow 1}$$

Por otro lado se sabe que $\Delta U_{4 \rightarrow 1} = mC_V \Delta T_{4 \rightarrow 1}$ y del inciso (f) se tiene que:

$$Q_{4 \rightarrow 1} = \Delta U_{4 \rightarrow 1} + W_{4 \rightarrow 1}, \text{ por lo tanto}$$

$$h) Q_{4 \rightarrow 1} = mC_V \Delta T_{4 \rightarrow 1} + mR\Delta T_{4 \rightarrow 1} = m(C_V + R)\Delta T_{4 \rightarrow 1}$$

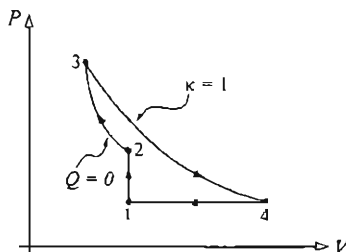
De la comparación de los incisos (g) y (h), concluimos que:

$$i) |W_{4 \rightarrow 1}| < |Q_{4 \rightarrow 1}|, \text{ dado que } (C_V + R) > R$$

Paso 5.

De la comparación de las curvas de temperatura constante ilustradas arriba, concluimos que:

$$a) T_2 < T_4, \quad b) T_3 > T_1$$



$$(2e) \Delta U_{2 \rightarrow 3} > 0$$

$$(1g) Q_{1 \rightarrow 2} > 0$$

$$(4i) W_{4 \rightarrow 1} < Q_{4 \rightarrow 1}$$

$$(3h) Q_{3 \rightarrow 4} > 0$$

$$(3f) U_3 = U_4$$

$$(4d) T_4 > T_1$$

$$(5a) T_2 < T_4$$

$$(5b) T_3 > T_1$$

$$(3d) T_4 = T_3$$

$$(1d) T_1 < T_2$$

UNIDAD II

LA VARIABLE ENTROPÍA, PROCESOS REVERSIBLES Y CICLOS

Contenido

- 2.1 La Variable Entropía.
- 2.2 Definición de Calor.
- 2.3 Ecuaciones para el cálculo de la variación en la Entropía.
- 2.4 Procesos Politrópicos y su representación en el plano ST .
- 2.5 Ciclos Reversibles. Representación en los planos VP y ST .
- 2.6 El Ciclo de Carnot.
- 2.7 Resumen de la Unidad.
- 2.8 Problemas Resueltos.

2.1 La Variable Entropía

En la Unidad I se analizaron algunos procesos a los que se somete el gas ideal y se representaron en el diagrama VP . En esta unidad se estudian nuevamente pero su representación se hará en un diagrama diferente; para lo cual es necesario introducir el concepto de entropía.

Considerando la interacción únicamente mecánica del sistema con los alrededores, de la Primera Ley (ecuación 1.4.4) se tiene,

$$dU = - d'W \quad (2.1.1)$$

Al sustituir las expresiones correspondientes a estos dos términos, vía las ecuaciones (1.5.2) y (1.6.1b),

$$mC_v dT = - PdV \quad (2.1.2)$$

y, puesto que de la ecuación de estado de gas ideal, la presión es $P = \frac{mRT}{V}$, resulta

$$mC_v \frac{dT}{T} + mR \frac{dV}{V} = 0 \quad (2.1.3)$$

El miembro izquierdo de esta expresión es la diferencial de alguna función que depende de T y V . Designémosla por S , de manera que

$$dS = mC_v \frac{dT}{T} + mR \frac{dV}{V} \quad (2.1.4)$$

La función $S = S(V, T)$ recibe el nombre de entropía y se expresa en $\frac{\text{kJ}}{\text{K}}$.

En suma, si el gas se encuentra térmicamente aislado y efectúa un cambio mecánicamente reversible, esto es, que el trabajo realizado por el gas sobre los alrededores es PdV , entonces la entropía S del gas permanece constante ó $dS = 0$.

Consideremos ahora que una pequeña cantidad de calor $d'Q$ es transferida al sistema permaneciendo constante su volumen, $dV = 0$. Si dT es la variación correspondiente en la temperatura se tendrá

$$dU = mC_v dT = d'Q \quad (2.1.5)$$

Cuando el volumen permanece constante la variación en la función S , de la ecuación (2.1.4) es $dS = mC_v \frac{dT}{T}$, es decir,

$$TdS = mC_v dT \quad (2.1.6)$$

Así que para un proceso diferencial en el que el volumen permanece constante se tendrá

$$TdS = d'Q \quad (2.1.7)$$

Cuando la temperatura varía apreciablemente en el proceso de transferencia de energía, deberá generalizarse la expresión como se indicará más adelante.

Se puede escribir la Primera Ley para un proceso diferencial reversible en la forma:

$$dU = TdS - PdV \quad (2.1.8)$$

Obsérvese la simetría que presenta esta relación: la parte del trabajo PdV es el producto de la presión P , que es una variable intensiva, por la variación en el volumen V , que es una variable extensiva; la parte del calor TdS es también el producto de una variable intensiva, la temperatura T , por la variación en la entropía S , que es una variable extensiva. Aunque

se ha derivado esta expresión para la energía de un gas ideal y perfecto, tiene una validez general para cualquier tipo de sistema: gaseoso, líquido o sólido.

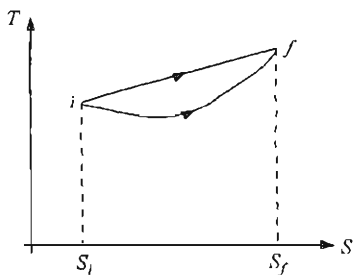
2.2. Definición de Calor

De la ecuación (2.1.7) se observa que en el caso de la interacción térmica, $TdS = d'Q$; esta ecuación muestra que cuando el sistema absorbe calor, $d'Q$ es positivo y la entropía aumenta puesto que también dS es positivo; en tanto que cuando el sistema cede calor $d'Q$ es negativo y la entropía disminuye puesto que dS es negativo.

Integrando la ecuación (2.1.7) entre los estados inicial i y final f se encuentra que el calor total es,

$$Q_{i \rightarrow f} = \int_i^f d'Q = \int_i^f TdS \quad (2.2.1)$$

Esta integral es el área bajo la curva representativa de la trayectoria del proceso en el diagrama ST . Dado que los estados i y f pueden unirse por diversas trayectorias, como lo muestra la Figura inferior, la integral tendrá un valor diferente para cada trayectoria; por lo tanto el calor *no es una variable termodinámica* puesto que depende del proceso.



Por otro lado, de la ecuación de estado (1.2.3) se tiene

$$(PdV + VdP) = mRdT \quad (2.2.2)$$

de aquí que, si se mantiene constante la presión resulta que $PdV = mRdT$; y de la definición de trabajo $d'W = PdV = mRdT$.

Para calcular el calor intercambiado entre el sistema y los alrededores cuando se realiza un proceso a presión constante usamos la Primera Ley,

$$d'Q = dU + d'W \quad (2.2.3)$$

Al sustituir las expresiones correspondientes a los dos términos del miembro derecho de la ecuación,

$$d'Q = mC_v dT + mRdT = m(C_v + R)dT \quad (2.2.4)$$

o

$$d'Q = mC_p dT \quad (2.2.5)$$

siendo $C_p = C_v + R$ el **calor específico a presión constante**, expresado en $\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$.

2.3 Ecuaciones para el cálculo de la variación en la Entropía

La sustitución de la forma diferencial de la ecuación de estado (1.2.3) en la ecuación para la variación diferencial de la entropía (2.1.4), conduce a las ecuaciones:

$$dS = mC_p \frac{dT}{T} - mR \frac{dP}{P} \quad (2.3.1)$$

y

$$dS = mC_p \frac{dV}{V} + mC_v \frac{dP}{P} \quad (2.3.2)$$

las cuales expresan la variación diferencial de la entropía considerando a PT y PV como variables independientes, respectivamente. Cabe aclarar que las ecuaciones (2.1.4), (2.31.1) y (2.3.2) representan el mismo cambio de entropía, en términos de parejas de variables independientes diferentes.

2.4 Procesos Politrópicos y su representación en el plano ST

Los diversos procesos politrópicos analizados en la sección 1.3 pueden ser representados en el correspondiente plano ST directamente de las ecuaciones (2.1.4), (2.3.1) y (2.3.2) como se muestra a continuación.

i) Proceso Isotérmico

Este proceso se caracteriza por: $dT = 0$, $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = 0$; de donde $Q_{i \rightarrow f} = W_{i \rightarrow f}$

De la ecuación (2.1.4) y de la forma diferencial de la ecuación de estado (1.2.3) se tiene que

$$dS = mR \frac{dV}{V} = -mR \frac{dP}{P} \quad (2.4.1)$$

ecuación que muestra que al aumentar el volumen y por consiguiente disminución en la presión, aumenta la entropía. Por el contrario, al disminuir el volumen y en consecuencia un aumento en la presión, la entropía disminuye.

La integración de la ecuación anterior entre los estados inicial y final nos lleva a que el cambio en la variable entropía para este proceso es

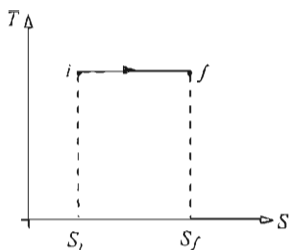
$$\Delta S_{i \rightarrow f} = mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = -mR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) \quad (2.4.2)$$

y de la ecuación (2.2.1) se tiene que el calor intercambiado entre el sistema y los alrededores es

$$Q_{i \rightarrow f} = \int_i^f T dS = T_i \int_i^f dS = T_i \Delta S_{i \rightarrow f} = W_{i \rightarrow f} \quad (2.4.3)$$

estando $\Delta S_{i \rightarrow f}$ dada a través de la ecuación (2.4.2).

Este proceso es representado por una recta paralela al eje de la entropía en el plano ST .

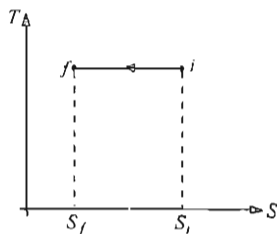


$$V_f > V_i$$

$$P_f < P_i$$

$$T_f = T_i$$

$$S_f > S_i$$



$$V_f < V_i$$

$$P_f > P_i$$

$$T_f = T_i$$

$$S_f < S_i$$

ii) Proceso Isoentrópico

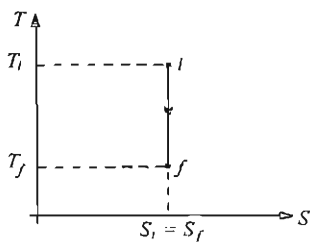
Este proceso se caracteriza por: $dS = 0$ por lo que $\Delta S_{i \rightarrow f} = 0$

De la ecuación (2.2.1) se tiene que el calor intercambiado entre el sistema y los alrededores es

$$Q_{i \rightarrow f} = \int_i^f T dS = 0 \quad (2.4.4)$$

y de la ecuación de la Primera Ley se tiene que $\Delta U_{i \rightarrow f} = -W_{i \rightarrow f} = -mC_V \Delta T_{i \rightarrow f}$.

El proceso isoentrópico es representado en el plano ST por una recta paralela al eje de la temperatura.

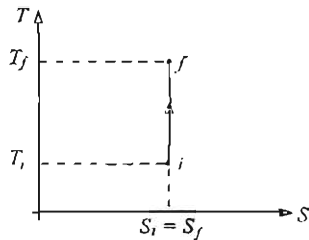


$$V_f > V_i$$

$$P_f < P_i$$

$$T_f < T_i$$

$$S_f = S_i$$



$$V_f < V_i$$

$$P_f > P_i$$

$$T_f > T_i$$

$$S_f = S_i$$

Ahora bien, aplicando la ecuación (2.3.2) a este proceso se tiene

$$dS = mC_p \frac{dV}{V} + mC_v \frac{dP}{P} = 0, \quad \text{esto es que,} \quad (C_p / C_v) \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

Integrando esta expresión entre los estados inicial y final,

$$(C_p / C_v) \int_i^f \frac{dV}{V} = - \int_i^f \frac{dP}{P} = \int_i^f \frac{dP}{P}, \quad \text{resulta que}$$

$$(C_p / C_v) \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)^{(C_p / C_v)} = \ln \left(\frac{P_i}{P_f} \right); \quad \text{de donde} \quad \frac{V_f^{(C_p / C_v)}}{V_i^{(C_p / C_v)}} = \left(\frac{P_i}{P_f} \right)$$

o

$$P_f V_f^{(C_p / C_v)} = P_i V_i^{(C_p / C_v)}$$

Esta última expresión es la ecuación de procesos politrópicos $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, para el

caso de entropía constante; en la que $\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \gamma > 1$, puesto que $C_p > C_v$.

iii) Proceso Isocórico

Este proceso está caracterizado por $dV = 0$, $W_{i \rightarrow f} = 0$; de la ecuación de Primera Ley

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f}, \text{ resulta que } Q_{i \rightarrow f} = \Delta U_{i \rightarrow f} = mC_v (T_f - T_i)$$

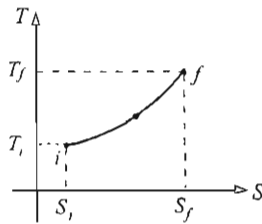
La variación en la entropía se obtiene de la integración de cualquiera de las ecuaciones (2.1.4), (2.3.1) o (2.3.2); obteniéndose respectivamente:

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = mC_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) \quad (2.4.5a)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = mC_p \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - mR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) \quad (2.4.5b)$$

$$\Delta S = mC_v \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) \quad (2.4.5c)$$

Finalmente, este proceso se representa en el plano ST mediante una curva de pendiente positiva; que muestra el comportamiento creciente o decreciente de la entropía con la temperatura como se ilustra a continuación:

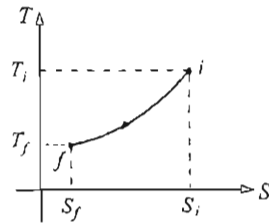


$$V_f = V_i$$

$$P_f > P_i$$

$$T_f > T_i$$

$$S_f > S_i$$



$$V_f = V_i$$

$$P_f < P_i$$

$$T_f < T_i$$

$$S_f < S_i$$

iv) Proceso Isobárico

Este proceso está caracterizado por $dP = 0$, $W_{i \rightarrow f} = P \Delta V_{i \rightarrow f} = mR \Delta T_{i \rightarrow f}$.

El calor intercambiado entre el sistema y los alrededores se obtiene de la integración de la ecuación (2.2.5); esto es

$$\int_i^f d'Q = mC_p \int_i^f dT \quad (2.4.6a)$$

$$Q_{i \rightarrow f} = mC_p \Delta T_{i \rightarrow f} = mC_p (T_f - T_i) \quad (2.4.6b)$$

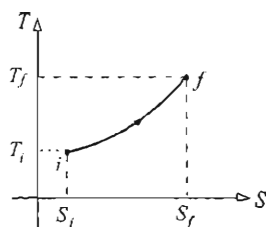
La variación en la entropía se obtiene de la integración de cualquiera de las ecuaciones (2.1.4), (2.3.1) ó (2.3.2); obteniéndose respectivamente:

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = mC_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad (2.4.7a)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = mC_p \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) \quad (2.4.7b)$$

$$\Delta S = mC_p \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad (2.4.7c)$$

Finalmente, este proceso se representa en el plano ST mediante una curva de pendiente positiva; que muestra el comportamiento creciente o decreciente de la entropía con la temperatura como se ilustra a continuación:

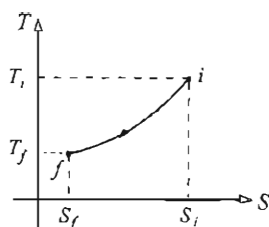


$$V_f > V_i$$

$$P_f = P_i$$

$$T_f > T_i$$

$$S_f > S_i$$



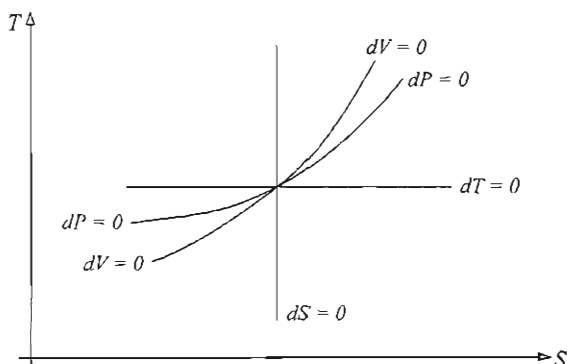
$$V_f < V_i$$

$$P_f = P_i$$

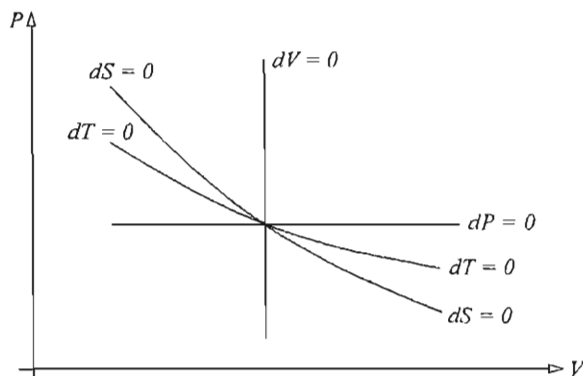
$$T_f < T_i$$

$$S_f < S_i$$

Los cuatro procesos anteriormente analizados se ilustran en el diagrama inferior en el que se muestra la diferencia en pendientes para los procesos isocórico e isobárico, siendo mayor la correspondiente al proceso a volumen constante.



Incluimos finalmente la representación de estos cuatro procesos en el plano VP .



En esta gráfica se observa la similitud entre las curvas de temperatura y entropía constante, siendo más negativa (mayor pendiente) la curva isotérmica.

2.5 Ciclos Reversibles. Representación en los planos VP y ST

Un proceso en el cual el estado final del sistema es igual al estado inicial recibe el nombre de **proceso cíclico** o, simplemente, **ciclo**. Puesto que la energía interna final U_f es igual a la energía interna inicial U_i , la variación en la energía $\Delta U_{i \rightarrow f} = \Delta U_{\text{neto}}$ será igual a cero:

$\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, por lo que $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}}$. Esto es, el calor neto absorbido por el sistema es igual al trabajo neto realizado por el sistema sobre los alrededores.

De lo anterior derivan su importancia práctica los procesos cíclicos: *transformar el calor* (que, en principio, en el universo se tiene en cantidad ilimitada y que, como tal, ofrece poca utilidad) en trabajo, que puede utilizarse para fines específicos.

En cualquier diagrama, un ciclo estará representado por una curva cerrada como lo muestran los diagramas VP y ST de la Figuras 1a y 1b.

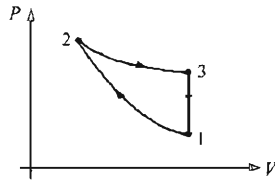


Figura 1a

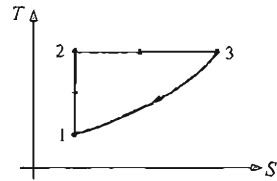


Figura 1b

En el diagrama VP la curva cerrada $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ representa un ciclo: Los puntos 2 y 1 corresponden a los volúmenes mínimo y máximo, respectivamente, que toma el sistema en el ciclo; los puntos 1 y 3 corresponden a los valores mínimo y máximo de la presión, respectivamente. En la parte $1 \rightarrow 2$ el sistema se comprime y los alrededores efectúan un trabajo sobre el sistema: el trabajo es negativo y está dado por el área de la superficie $(1 \rightarrow 2 \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow 1)$ de la Figura 2a. En la parte $2 \rightarrow 3$ el sistema se expande, es decir el sistema realiza trabajo sobre los alrededores; este trabajo es positivo y está dado por el área de la superficie $(2 \rightarrow 3 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow 2)$ de la Figura 2b. En la parte $3 \rightarrow 1$ el volumen del sistema es constante por lo que el trabajo es igual a cero.

El trabajo total efectuado por el sistema será igual a la suma algebraica de los trabajos, es decir, el trabajo realizado por el sistema es igual al área de la superficie $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ de la Figura 2c. En este ejemplo, el trabajo es positivo, ya que el trabajo realizado por el sistema sobre los alrededores durante la expansión es mayor que el trabajo realizado por los alrededores sobre el sistema durante la compresión.

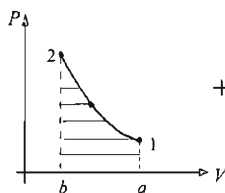


Figura 2a

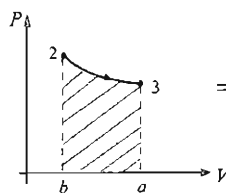


Figura 2b

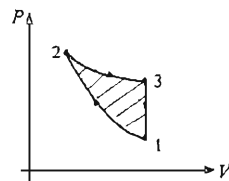


Figura 2c

La Figura 1b muestra el diagrama del ciclo anteriormente descrito en el plano ST .

Los puntos 1 y 3 corresponden a las entropías mínima y máxima, respectivamente, que toma el sistema en el ciclo; en tanto que los puntos 1 y 3 corresponden a los valores mínimo y máximo de la temperatura, respectivamente. En la parte $2 \rightarrow 3$ el sistema absorbe calor ya que la entropía aumenta; por lo tanto el calor es positivo y está dado por el área de la superficie $(2 \rightarrow 3 \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow 2)$ de la Figura 3a. En la parte $3 \rightarrow 1$ la entropía disminuye por lo que el sistema cede calor a los alrededores; este calor es negativo y está dado por el área de la superficie $(3 \rightarrow 1 \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow 3)$ de la Figura 3b. En la parte $1 \rightarrow 2$ el calor es igual a cero puesto que la entropía es constante.

El calor total absorbido por el sistema será igual a la suma algebraica de los calores, es decir, el calor neto absorbido por el sistema es igual al área de la superficie $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ de la Figura 3c. En este ejemplo, el calor es positivo, ya que el calor absorbido por el sistema es mayor que el calor cedido.

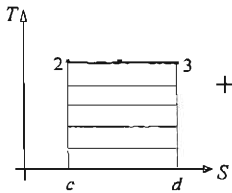


Figura 3a

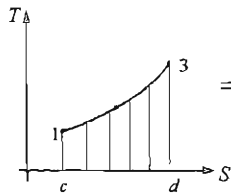


Figura 3b

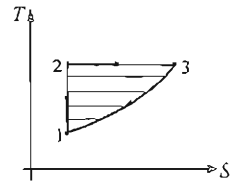


Figura 3c

El área de la superficie encerrada por la curva que representa al ciclo en el diagrama VP (Figura 2c) es igual al área de la superficie encerrada por la curva del mismo ciclo en el diagrama ST (Figura 3c), puesto que en un ciclo el trabajo neto es igual al calor neto.

Una cantidad importante, tanto teórica como prácticamente, asociada con un ciclo, es su rendimiento. En general, en alguna parte del ciclo se absorbe calor y en la otra el sistema

cede calor a los alrededores. Desde el punto de vista práctico, interesa saber qué fracción del calor absorbido se transforma en trabajo útil. De todos los ciclos que absorben una cantidad de calor, el mejor para fines prácticos será aquel que devuelva a los alrededores la menor cantidad de calor, o sea, aquel del que se obtenga la mayor cantidad de trabajo. Parece, entonces, que el cociente entre el trabajo neto realizado por el ciclo y el calor absorbido es una medida de la utilidad práctica de un ciclo. Este cociente recibe el nombre de **rendimiento r** del ciclo.

$$r = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_a} \quad (2.5.1a)$$

Dado que $W_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} = Q_a - Q_c$, resulta que

$$r = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_a} = \frac{Q_a - Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} \quad (2.5.1b)$$

Ecuación que muestra claramente que el rendimiento es menor que uno (menor del 100%).

La ecuación (2.5.1b) también nos indica que: A igualdad de calor absorbido, el ciclo que tendrá mayor rendimiento es el que ceda la menor cantidad de calor. Por otra parte, de todos los ciclos que ceden una determinada cantidad de calor el que tendrá mayor rendimiento es aquel que absorba la mayor cantidad de calor.

2.6 El Ciclo de Carnot

Una consecuencia interesante de lo mencionado en el párrafo anterior es la siguiente: consideremos en el plano ST un ciclo arbitrario $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ (curva continua) como se observa en la Figura 4.

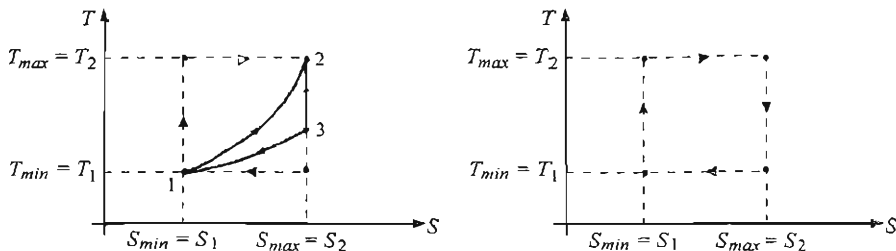


Figura 4

T_2 y S_2 son los valores máximos de la temperatura y de la entropía, respectivamente; T_1 y S_1 los correspondientes valores mínimos de las dos variables. Comparemos este ciclo con el definido por las dos isothermas T_2 y T_1 y las dos isoentrópicas S_1 y S_2 (ciclo de la curva punteada). El rendimiento de este segundo ciclo es mayor que el del primero: el calor absorbido por el segundo es mayor que el absorbido por el primero, como lo muestra la comparación de áreas en la Figura 5a; y el calor cedido por el primero es mayor que el cedido por el segundo, la comparación de áreas se ilustra en la Figura 5b. Es decir, el cociente Q_c/Q_o es menor en el caso del segundo ciclo puesto que, en comparación con el primero, Q_c ha disminuido y Q_o ha aumentado. El ciclo formado por las isothermas T_2 y T_1 y las dos isoentrópicas S_1 y S_2 recibe el nombre de **ciclo de Carnot**.

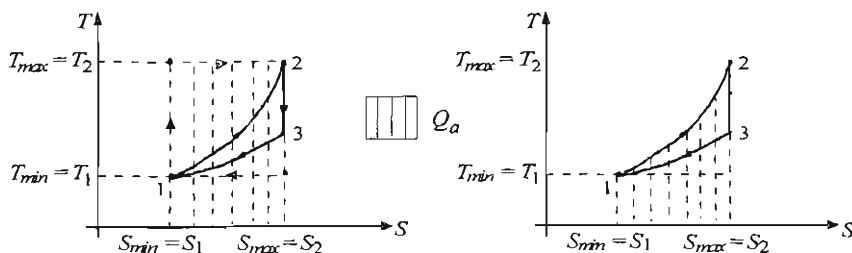


Figura 5a

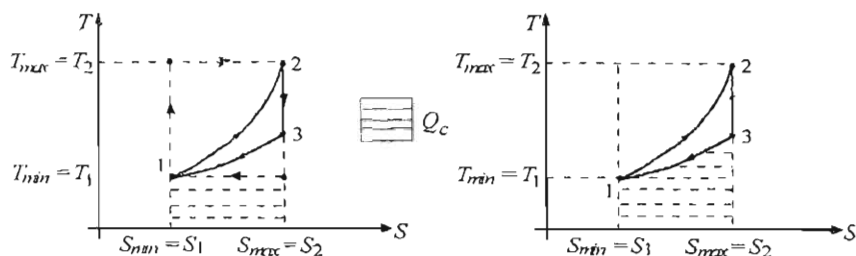


Figura 5b

El rendimiento del ciclo de Carnot puede calcularse fácilmente: el calor absorbido en la isoterma T_2 es: $Q_a = T_2 (S_2 - S_1)$ y el calor cedido a la temperatura T_1 es: $Q_c = T_1 (S_2 - S_1)$;

entonces
$$\frac{Q_c}{Q_a} = \frac{T_1 (S_2 - S_1)}{T_2 (S_2 - S_1)} = \frac{T_1}{T_2}.$$

El rendimiento del ciclo de Carnot,

$$r_c = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$$

depende solamente del cociente de las temperaturas mínima y máxima.

De los argumentos anteriores se infiere que el rendimiento de ningún ciclo que opere entre las temperaturas T_2 y T_1 y las entropías S_2 y S_1 podrá exceder al rendimiento de un ciclo de Carnot definido por las dos isothermas T_2 y T_1 y las dos isoentrópicas S_2 y S_1 . A esto se le conoce como el teorema de Carnot.

2.7 Resumen de la Unidad

Relación Energía Interna – Temperatura

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = mC_V \Delta T_{i \rightarrow f}$$

Trabajo

$$W_{i \rightarrow f} = -mC_V \Delta T_{i \rightarrow f} \quad (\text{Proceso Isoentrópico})$$

$$W_{i \rightarrow f} = T_i \Delta S_{i \rightarrow f} \quad (\text{Proceso Isotérmico})$$

$$W_{i \rightarrow f} = P_i \Delta V_{i \rightarrow f} = mR \Delta T_{i \rightarrow f} \quad (\text{Proceso Isobárico})$$

Primera Ley de la Termodinámica

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f}$$

Variación en la entropía del gas ideal

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = mC_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = mC_P \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - mR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = mC_P \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) + mC_V \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right)$$

Rendimiento r de un ciclo

$$r = \frac{W}{Q_a} = \frac{Q_a - Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}$$

Rendimiento r_C del ciclo de Carnot

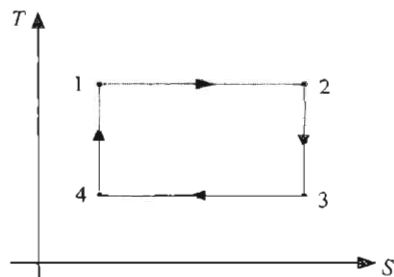
$$r_C = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$$

**2.8 Problemas Resueltos de la Selección de Problemas de Termodinámica,
Modelo de Segunda Evaluación Parcial**

Problema 1.

Un sistema que consta de 3 kg de helio, efectúa el ciclo mostrado en el plano ST con un rendimiento del 50 %.

Sabiendo que absorbe 900 kJ de calor a la temperatura de 600 K. Llenar la tabla.



	T/K	$\Delta U/kJ$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/kJ K^{-1}$
1					
2					
3					
4					
1					
neto					

Datos: $m = 3$ kg, $R = 2.08$ kJ/kgK, $C_V = 3.12$ kJ/kgK

Solución:

Paso 1.

El ciclo está formado por los cambios que se describen a continuación:

Cambio	Proceso	Características
(1→2)	isotérmico	a) $\Delta U_{1\rightarrow 2} = 0$
(2→3)	isoentrópico	b) $\Delta S_{2\rightarrow 3} = 0$, c) $Q_{2\rightarrow 3} = 0$
(3→4)	isotérmico	d) $\Delta U_{3\rightarrow 4} = 0$
(4→1)	isoentrópico	e) $\Delta S_{4\rightarrow 1} = 0$, f) $Q_{4\rightarrow 1} = 0$

Paso 2.

En un ciclo la variación total en cualquier variable termodinámica es igual a cero, por lo tanto:

a) $\Delta U_{neto} = 0$, b) $\Delta S_{neto} = 0$

Recordemos que en el plano ST el área bajo la curva que une dos estados representa al calor intercambiado entre el sistema y los alrededores. El signo del calor depende del signo correspondiente al cambio en la entropía del sistema.

Para el proceso (1→2), el área bajo la curva es positiva ya que la entropía del sistema aumenta; lo cual significa que $Q_{1\rightarrow 2} > 0$, es decir es un calor absorbido por el sistema. Para el proceso (3→4), al disminuir la entropía, el área bajo la curva es negativa por lo que $Q_{3\rightarrow 4} < 0$, esto es un calor cedido por el sistema.

Se sabe que el sistema absorbe 900 kJ de calor a la temperatura de 600 K, por lo tanto,

$$c) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = 900 \text{ kJ} \quad \text{y} \quad d) \quad T_1 = T_2 = T_{\max} = 600 \text{ K}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley al proceso (1→2): $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$ se infiere,

$$e) \quad W_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} = 900 \text{ kJ}$$

De la definición de calor se tiene que:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 T dS = T_1 \int_1^2 dS = T_1 \Delta S_{1 \rightarrow 2}; \text{ de donde,}$$

$$f) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{T_1} = \frac{900 \text{ kJ}}{600 \text{ K}} = 1.5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 3.

Dado que: $\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1} = 0$, resulta que

$$a) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 4} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{4 \rightarrow 1}) = 0 - (1.5 + 0 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -1.5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

El rendimiento r_C del ciclo está definido como:

$$r_C = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 0.5; \text{ así que: } \frac{T_3}{T_2} = (1 - r_C), \text{ de donde}$$

$$b) \quad T_3 = T_2 (1 - r_C) = (600 \text{ K})(1 - 0.5) = 300 \text{ K} = T_4$$

$$\text{De la definición de calor para el proceso (3→4): } Q_{3 \rightarrow 4} = \int_3^4 T dS = T_3 \int_3^4 dS = T_3 \Delta S_{3 \rightarrow 4}$$

$$\text{se obtiene: } c) \quad Q_{3 \rightarrow 4} = T_3 \Delta S_{3 \rightarrow 4} = (300 \text{ K}) \left(-1.5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -450 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4} = 0$ resulta que,

$$d) \quad W_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} = -450 \text{ kJ}$$

El calor neto o total se obtiene como:

$$e) \quad Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1} = (900 + 0 - 450 + 0) \text{ kJ} = 450 \text{ kJ}$$

$$\text{y de la ecuación de 1ª Ley: } \Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0,$$

$$f) \quad W_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} = 450 \text{ kJ}$$

Paso 4.

Determinamos la variación en la energía interna del sistema durante los procesos isoentrópicos:

$$a) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = mC_V (T_3 - T_2) = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 - 600) \text{ K} = -2808 \text{ kJ}$$

$$b) \quad \Delta U_{4 \rightarrow 1} = mC_V (T_1 - T_4) = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 - 300) \text{ K} = 2808 \text{ kJ}$$

Para estos dos procesos el calor intercambiado es igual a cero; por lo que aplicando la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = -W_{i \rightarrow f}$ resulta que

$$c) \quad W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(-2808 \text{ kJ}) = 2808 \text{ kJ}$$

$$d) \quad W_{4 \rightarrow 1} = -\Delta U_{4 \rightarrow 1} = -(2808 \text{ kJ}) = -2808 \text{ kJ}$$

	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1	2d 600	1a 0	2c 900	2e 900	2f 1.5
2	2d 600	4a -2808	1c 0	4c 2808	1b 0
3	3b 300	1d 0	3c 450	3d -450	3a -1.5
4	3b 300	4b 2808	1f 0	4d -2808	1e 0
1	2d 600				
neto		2a 0	3e 450	3f 450	2b 0

Problema 2.

Un sistema que consta de 2 kg de helio, inicialmente a 150 kPa y 375 K, experimenta los siguientes cambios:

A temperatura constante pasa del estado 1 al 2, hasta adquirir un volumen de 5 m³; llega al estado 3, mediante un proceso a presión constante; regresa al estado inicial en forma isocórica.

a) Llenar la tabla, b) esbozar el diagrama del ciclo en los planos VP y ST ; calcular: c) el rendimiento r del ciclo y d) el rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas.

	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJ/K}$
1							
2							
3							
1							
neto							

Datos: $m = 2 \text{ kg}$, $R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 3.12 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Como se conocen la presión y la temperatura en el estado inicial, de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos:

$$a) \quad V_1 = \frac{mRT_1}{P_1} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (375 \text{ K})}{\left(150 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 10.4 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 10.4 \text{ m}^3$$

El sistema pasa del estado 1 al 2 mediante un proceso isotérmico hasta adquirir un volumen de 5 m³; esto significa,

$$b) \quad T_2 = T_1 = 375 \text{ K} \quad \text{y} \quad c) \quad V_2 = 5 \text{ m}^3$$

De la ecuación de procesos politrópicos $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, con $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 1$, esto es $P_2 V_2 = P_1 V_1$; calculamos:

$$d) \quad P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = \frac{(150 \text{ kPa})(10.4 \text{ m}^3)}{(5 \text{ m}^3)} = 312 \text{ kPa}$$

El sistema pasa del estado 2 al 3 mediante un proceso isobárico; esto es que:

$$e) \quad P_3 = P_2 = 312 \text{ kPa}$$

Como el sistema regresa al estado inicial isocóricamente, entonces

$$f) \quad V_3 = V_1 = 10.4 \text{ m}^3$$

La temperatura del estado 3 se determina a través de la ecuación de estado,

$$g) \quad T_3 = \frac{P_3 V_3}{mR} = \frac{\left(312 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right) (10.4 \text{ m}^3)}{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)} = 780 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 780 \text{ K}$$

Paso 2.

Dado que el sistema realiza un ciclo, entonces: a) $\Delta U_{\text{neto}} = 0$ y b) $\Delta S_{\text{neto}} = 0$

La variación en la energía interna para cada uno de los procesos se calcula mediante la ecuación: $\Delta U_{i \rightarrow f} = mC_v \Delta T_{i \rightarrow f}$, esto es:

Como $\Delta T_{1 \rightarrow 2} = 0$, entonces: c) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$

$$d) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = mC_v (T_3 - T_2) = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right) (780 - 375) \text{ K} = 2527.2 \text{ kJ}$$

Del inciso (2a) se sabe que $\Delta U_{\text{neto}} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0$, así que:

$$e) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{\text{neto}} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (0 + 2527.2 \text{ kJ}) = -2527.2 \text{ kJ}$$

Se conocen R y C_v , así que: $C_p = C_v + R = 5.20 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

Paso 3.

Para el proceso (1→2), la variación en la entropía se determina mediante la ecuación

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = mC_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + mR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = mR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right), \text{ esto es:}$$

$$a) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{5}{10.4} \right) = -3.05 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y para el proceso (2→3) a través de la ecuación

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = m C_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) - m R \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = m C_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right), \text{ esto es:}$$

$$b) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = (2 \text{ kg}) \left(5.20 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{780}{375} \right) = 7.62 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Del inciso (2b) se sabe que $\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 1} = 0$, así que:

$$c) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 1} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3}) = (0) - (-3.05 + 7.62) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -4.57 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 4.

Para el proceso isotérmico (1→2), el calor y el trabajo son iguales y de la definición de calor:

$$a) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 T dS = T_1 \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (375 \text{ K}) \left(-3.05 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -1143.75 \text{ kJ} = W_{1 \rightarrow 2}$$

Para el proceso isobárico (2→3), de la definición de trabajo:

$$W_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 P dV = \int_2^3 m R dT = m R \Delta T; \text{ se tiene que}$$

$$b) \quad W_{2 \rightarrow 3} = m R (T_3 - T_2) = (2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (780 - 375) \text{ K} = 1684.8 \text{ kJ}$$

en tanto que de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$:

$$c) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} + W_{2 \rightarrow 3} = (2527.2 + 1684.8) \text{ kJ} = 4212 \text{ kJ}$$

Paso 5.

El proceso isocórico ($3 \rightarrow 1$) se caracteriza por: a) $W_{3 \rightarrow 1} = 0$ y aplicando la ecuación de Primera Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$,

b) $Q_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{3 \rightarrow 1} = -2527.2 \text{ kJ}$

Finalmente, calculamos el trabajo neto, que es igual al calor neto mediante la suma de los trabajos (calores) en cada proceso:

$$W_{\text{neto}} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 1} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = Q_{\text{neto}}$$

c) $W_{\text{neto}} = (-1143.75 + 1684.8 + 0) \text{ kJ} = 541.05 \text{ kJ}$

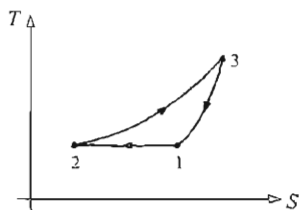
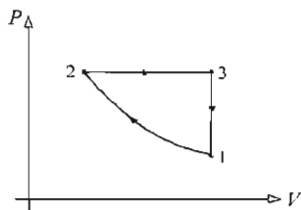
Paso 6.

El rendimiento r del ciclo se obtiene como:

a) $r = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_a} = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{2 \rightarrow 3}} = \frac{541.05 \text{ kJ}}{4212 \text{ kJ}} = 0.1284 = 12.84\%$

El rendimiento r_c de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas es:

b) $r_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{375 \text{ K}}{780 \text{ K}} = 0.5192 = 51.92\%$

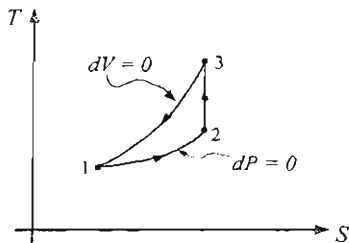


	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1	150	10.4	375	2c 0	4a -1143.75	4a -1143.75	3a -3.05
2	312	5	375	2d 2527.2	4c 4212	4b 1684.8	3b 7.62
3	312	10.4	780	2e -2527.2	5b -2527.2	5a 0	3c -4.57
1	150	10.4	375				
neto				2a 0	5c 541.05	5c 541.05	2b 0

Problema 3.

Un gas ideal realiza el ciclo mostrado en el plano ST .

a) Ilustrar el ciclo en el plano VP , b) clasificar como verdadera (V) o falsa (F) cada una de las relaciones indicadas.



☐ $P_1 > P_3$

☐ $Q_{1 \rightarrow 2} > Q_{3 \rightarrow 1}$

☐ $T_1 > T_3$

☐ $S_2 < S_3$

☐ $P_3 > P_2$

☐ $U_3 > U_1$

☐ $S_1 = S_2$

☐ $W_{2 \rightarrow 3} < 0$

☐ $V_2 > V_1$

☐ $W_{neto} > 0$

Solución:

El diagrama ST ilustrado, nos permite inferir directamente el nombre del proceso, comparar el valor de: la temperatura, la energía interna y la entropía en cada estado por los que pasa el sistema; también se infiere directamente el signo del calor intercambiado entre el sistema y los alrededores; todo esto se detalla a continuación:

Paso 1.

El proceso $(1 \rightarrow 2)$ es *isobárico* y tiene las siguientes características:

a) $P_1 = P_2$, b) $T_2 > T_1$, c) $U_2 > U_1$, d) $S_2 > S_1$, e) $Q_{1 \rightarrow 2} > 0$

Este proceso se representa en el plano VP mediante una recta paralela al eje de volumen en la que dado que la temperatura está aumentando, el volumen aumentará también, por lo que:

f) $V_2 > V_1$, g) $W_{1 \rightarrow 2} > 0$

Paso 2.

El proceso $(2 \rightarrow 3)$ es *isoentrópico* y está caracterizado por:

a) $T_3 > T_2$, b) $U_3 > U_2$, c) $S_3 = S_2$, d) $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$

La representación de este proceso en el plano VP es mediante una curva tipo hipérbola en la que, dado que la temperatura está aumentando, la presión aumentará también; mientras que el volumen disminuye; por lo que:

e) $P_3 > P_2$, f) $V_3 < V_2$, g) $W_{2 \rightarrow 3} < 0$

Paso 3.

El proceso (3→1) es *isocórico* y tiene las siguientes características:

$$a) V_3 = V_1, \quad b) T_1 < T_3, \quad c) U_1 < U_3, \quad d) S_1 < S_3, \quad e) Q_{3 \rightarrow 1} < 0$$

Este proceso se representa en el plano VP mediante una recta paralela al eje de la presión en la que, dado que la temperatura disminuye, la presión disminuye también, por lo que:

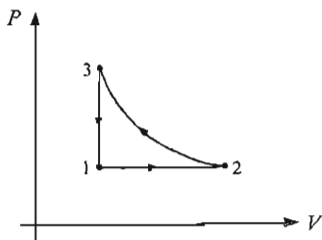
$$f) P_1 < P_3, \quad g) W_{3 \rightarrow 1} = 0$$

Paso 4.

Dado que el calor intercambiado entre el sistema y los alrededores se interpreta como el área bajo la curva en el plano ST , entonces comparando el área bajo la curva que une a los estados 1 y 2 así como los estados 3 y 1, se concluye que en valor absoluto:

$$a) |Q_{1 \rightarrow 2}| < |Q_{3 \rightarrow 1}|$$

Finalmente, dado que en un ciclo la variación neta en energía interna es igual a cero, el calor y el trabajo netos son iguales de aquí que sumando las áreas bajo las curvas que unen a los estados (1 a 2), (2 a 3) y (3 a 1) en el plano ST se obtiene el calor neto. Este último es negativo dado que $Q_{3 \rightarrow 1}$, que es negativo, resulta ser mayor que $Q_{1 \rightarrow 2}$, que es positivo, y $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$. Esto es que $Q_{\text{neto}} < 0$ y por lo tanto, $b) W_{\text{neto}} < 0$.



$$\boxed{F(3f)} \quad P_1 > P_3$$

$$\boxed{F(3b)} \quad T_1 > T_3$$

$$\boxed{V(2e)} \quad P_3 > P_2$$

$$\boxed{F(1d)} \quad S_1 = S_2$$

$$\boxed{V(1f)} \quad V_2 > V_1$$

$$\boxed{F(4a)} \quad Q_{1 \rightarrow 2} > Q_{3 \rightarrow 1}$$

$$\boxed{F(2c)} \quad S_2 < S_3$$

$$\boxed{V(3c)} \quad U_3 > U_1$$

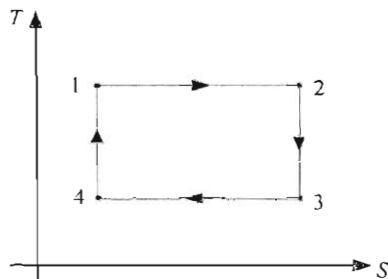
$$\boxed{V(2g)} \quad W_{2 \rightarrow 3} < 0$$

$$\boxed{F(4b)} \quad W_{\text{neto}} > 0$$

Problema 1.

Un sistema que consta de 2 kg de helio, realiza el ciclo mostrado en el plano ST con un rendimiento de 60%.

Sabiendo que a la temperatura de 300 K el sistema cede 600 kJ de calor, llenar la tabla.



	T/K	$\Delta U/kJ$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/kJK^{-1}$
1					
2					
3					
4					
1					
neto					

Datos: $m = 2$ kg, $R = 2.08$ kJ/kgK, $C_V = 3.12$ kJ/kgK

Solución:

Paso 1.

Como se observa en el plano ST los estados (1 y 2) y (3 y 4) respectivamente, están unidos mediante curvas de temperatura constante, luego entonces:

$$a) \quad T_1 = T_2 = T_{\text{máx}}, \quad b) \quad T_3 = T_4 = T_{\text{mín}} = 300 \text{ K}, \quad c) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0 = \Delta U_{3 \rightarrow 4}$$

Los procesos (2 \rightarrow 3) y (4 \rightarrow 1) son isoentrópicos, lo que significa que:

$$d) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = 0 = Q_{4 \rightarrow 1}, \quad e) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0 = \Delta S_{4 \rightarrow 1}$$

Debido a que en un ciclo la variación total en cualquier variable termodinámica es igual a cero, entonces

$$f) \quad \Delta U_{\text{neto}} = 0 \quad \text{y} \quad g) \quad \Delta S_{\text{neto}} = 0$$

Paso 2.

Se sabe que el sistema cede 600 kJ de calor a la temperatura de 300 K, esto es que:

$$a) \quad Q_{3 \rightarrow 4} = -600 \text{ kJ}$$

y de la ecuación de 1ª Ley, $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = 0 = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4}$ resulta que:

$$b) \quad W_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} = -600 \text{ kJ}$$

De la definición de calor se tiene que: $Q_{3 \rightarrow 4} = \int_3^4 T dS = T_3 \int_3^4 dS = T_3 \Delta S_{3 \rightarrow 4}$, de donde:

$$c) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 4} = \frac{Q_{3 \rightarrow 4}}{T_3} = \frac{-600 \text{ kJ}}{300 \text{ K}} = -2 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

De la definición de rendimiento para el ciclo de Carnot,

$$r_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 0.6; \text{ se tiene que } \frac{T_3}{T_2} = 1 - r_c;$$

por lo que

$$d) \quad T_2 = \frac{T_3}{(1 - r_c)} = \frac{300 \text{ K}}{(1 - 0.6)} = 750 \text{ K} = T_1$$

Aplicando la definición de calor para el proceso isotérmico (1→2) se tiene que,

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 T dS = T_1 \int_1^2 dS = T_1 \Delta S_{1 \rightarrow 2}, \text{ de donde:}$$

$$e) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = T_1 \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (750 \text{ K}) \left(2 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = 1500 \text{ kJ}$$

y de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0 = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, resulta que:

$$f) \quad W_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} = 1500 \text{ kJ}$$

Paso 3.

La suma del calor intercambiado entre el sistema y los alrededores durante cada proceso nos da el calor neto: $Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1}$, por lo que:

$$a) \quad Q_{\text{neto}} = (1500 + 0 - 600 + 0) \text{ kJ} = 900 \text{ kJ}$$

De la ecuación de la 1ª Ley de la Termodinámica $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$ se infiere

$$b) \quad W_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} = 900 \text{ kJ}$$

Paso 4.

Finalmente, determinamos la variación en la energía interna para el proceso (2→3):

$$a) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = m C_v (T_3 - T_2) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 - 750) \text{ K} = -2808 \text{ kJ}$$

y para el proceso (4→1):

$$b) \quad \Delta U_{4 \rightarrow 1} = m C_v (T_1 - T_4) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (750 - 300) \text{ K} = 2808 \text{ kJ}$$

Para los procesos isoentrópicos (2→3) y (4→1) se tiene a partir de la ecuación de Primera Ley $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = -W_{i \rightarrow f}$ que,

$$c) \quad W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(-2808 \text{ kJ}) = 2808 \text{ kJ}$$

y

$$d) \quad W_{4 \rightarrow 1} = -\Delta U_{4 \rightarrow 1} = -(2808 \text{ kJ}) = -2808 \text{ kJ}$$

	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1	2d 750	1c 0	2e 1500	2f 1500	1d 2
2	2d 750	4a -2808	1d 0	4c 2808	1e 0
3	1b 300	1c 0	2a -600	2b -600	2c -2
4	1b 300	4b 2808	1d 0	4d -2808	1e 0
1	1d 750				
neto		1f 0	3a 900	3b -900	1g 0

Problema 2.

Un sistema que consta de 2 kg de helio, inicialmente a la temperatura de 300 K y a la presión de 200 kPa efectúa los cambios siguientes: Isoentrópicamente se lleva hasta una presión de 450 kPa; a continuación en forma isotérmica se lleva hasta la presión inicial; por último isobáricamente regresa al estado inicial.

a) Llenar la tabla, b) esbozar el diagrama del ciclo en los planos VP y ST ; calcular: c) el rendimiento r del ciclo y d) el rendimiento r_C de un ciclo de Carnot que opere entre las mismas temperaturas extremas.

	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1							
2							
3							
1							
neto							

Datos: $m = 2 \text{ kg}$, $R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 3.12 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

De la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos:

$$a) \quad V_1 = \frac{mRT_1}{P_1} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 \text{ K})}{\left(200 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 6.24 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 6.24 \text{ m}^3$$

El sistema pasa del estado 1 al 2 mediante un proceso isoentrópico, hasta alcanzar la presión de 450 kPa, esto significa que:

$$b) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0, \quad c) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = 0, \quad d) \quad P_2 = 450 \text{ kPa}$$

Se conocen R y C_V , así que: $C_P = C_V + R = 5.20 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

$$\text{Dado que } \Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0, \text{ de la ecuación } \Delta S_{1 \rightarrow 2} = mC_P \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - mR \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 0,$$

$$\text{se tiene que: } mC_P \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = mR \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right); \quad \text{esto es,} \quad \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \left(\frac{R}{C_P} \right) \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

por lo tanto: $\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(R/C_p)}$; de donde:

$$e) \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(R/C_p)} = (300 \text{ K}) \left(\frac{450}{200} \right)^{(2.08/5.20)} = 414.95 \text{ K}$$

El cambio en la energía interna del sistema durante este proceso es:

$$f) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = m C_v (T_2 - T_1) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (414.95 - 300) \text{ K} = 717.29 \text{ kJ}$$

De la ecuación de Primera Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, resulta que

$$g) \quad W_{1 \rightarrow 2} = -\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -(717.29 \text{ kJ}) = -717.29 \text{ kJ}$$

Mediante la ecuación de estado, determinamos finalmente el volumen del sistema en el estado 2:

$$h) \quad V_2 = \frac{m R T_2}{P_2} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (414.95 \text{ K})}{\left(450 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 3.84 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 3.84 \text{ m}^3$$

Paso 2.

Mediante un proceso isotérmico el sistema pasa del estado 2 al 3, hasta adquirir la presión inicial; esto significa que:

$$a) \quad T_3 = T_2 = 414.95 \text{ K} , \quad b) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0 , \quad c) \quad P_3 = P_1 = 200 \text{ kPa}$$

Usando la ecuación de procesos politrópicos $P_3 V_3^\kappa = P_2 V_2^\kappa$ con $\kappa = 1$ se tiene que:
 $P_3 V_3 = P_2 V_2$, de donde:

$$d) \quad V_3 = \frac{P_2 V_2}{P_3} = \frac{(450 \text{ kPa}) (3.84 \text{ m}^3)}{(200 \text{ kPa})} = 8.64 \text{ m}^3$$

La variación en entropía del sistema durante este proceso isotérmico se calcula mediante la relación:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = mC_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) - mR \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = -mR \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right); \text{ es decir:}$$

$$e) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = -(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{200}{450} \right) = 3.37 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Finalmente, como $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0$, el calor y el trabajo intercambiados por el sistema y los alrededores durante este proceso son iguales; y de la definición de calor se tiene:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 T dS = T_3 \int_2^3 dS = T_3 \Delta S_{2 \rightarrow 3}; \text{ esto es que,}$$

$$f) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = T_3 \Delta S_{2 \rightarrow 3} = (414.95 \text{ K}) \left(3.37 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = 1398.38 \text{ kJ} = W_{2 \rightarrow 3}$$

Paso 3.

Debido a que en un ciclo la variación total en cualquier variable termodinámica es igual a cero, entonces

$$a) \quad \Delta U_{\text{neto}} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0; \text{ de donde}$$

$$b) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{\text{neto}} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (717.29 + 0) \text{ kJ} = -717.29 \text{ kJ}$$

$$\text{También, } c) \quad \Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 1} = 0; \text{ por lo tanto:}$$

$$d) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 1} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (3.37 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -3.37 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 4.

$$\text{De la definición de trabajo para el proceso } (3 \rightarrow 1): W_{3 \rightarrow 1} = \int_3^1 P dV = \int_3^1 mR dT$$

se tiene: $W_{3 \rightarrow 1} = P_3 \Delta V = mR \Delta T$; esto es que:

$$a) \quad W_{3 \rightarrow 1} = mR(T_1 - T_3) = (2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 - 414.95) \text{ K} = -478.19 \text{ kJ}$$

y de la Primera Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$, se infiere que

$$b) \quad Q_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{3 \rightarrow 1} + W_{3 \rightarrow 1} = (-717.29 - 478.19) \text{ kJ} = -1195.48 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley al ciclo completo: $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$

se tiene que $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}}$, esto es:

$$c) \quad Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = (0 + 1398.38 - 1195.48) \text{ kJ} = 202.9 \text{ kJ}$$

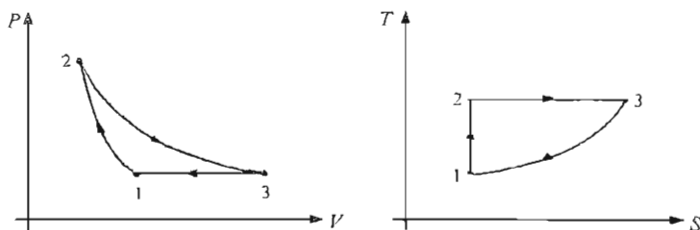
Paso 5

El rendimiento r del ciclo lo determinamos mediante la ecuación:

$$a) \quad r = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{\text{ci}}} = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{2 \rightarrow 3}} = \frac{202.9 \text{ kJ}}{1398.38 \text{ kJ}} = 0.1451 = 14.51\%$$

y el rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas es:

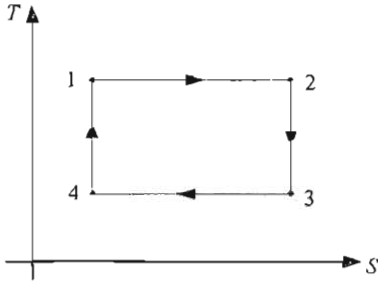
$$b) \quad r_C = \left(1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}}\right) = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = \left(1 - \frac{300}{414.95}\right) = 0.277 = 27.7\%$$



	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJ/K}$
1	200	6.24	300	1f 717.29	1c 0	1g -717.29	1b 0
2	450	3.84	414.95	2b 0	2f 1398.38	2f 1398.38	2e 3.37
3	200	8.64	414.95	3b -717.29	3b -1195.48	3a -478.19	3d -3.37
1	200	6.24	300				
neto				3a 0	4c 202.90	4c 202.90	3c 0

Problema 1.

2 kg de nitrógeno efectúan el ciclo mostrado en la figura con un rendimiento de 35%. Sabiendo que el trabajo neto realizado por el sistema es de 350 kJ y que la temperatura superior a la que trabaja el ciclo es de 600 K, llenar la tabla.



	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJ/K}$
1					
2					
3					
4					
1					
neto					

Datos: $m = 2 \text{ kg}$, $R = 0.30 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 0.74 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Los procesos isotérmicos ($1 \rightarrow 2$) y ($3 \rightarrow 4$) tienen como características:

a) $T_1 = T_2 = T_{\max} = 600 \text{ K}$, b) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0 = \Delta U_{3 \rightarrow 4}$

Para cualquier ciclo termodinámico se cumple que:

c) $\Delta U_{\text{neto}} = 0$, d) $\Delta S_{\text{neto}} = 0$

De la ecuación de la Primera Ley de la Termodinámica $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, se concluye que

e) $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}} = 350 \text{ kJ}$

Los procesos isoentrópicos ($2 \rightarrow 3$) y ($4 \rightarrow 1$) se distinguen porque

f) $Q_{2 \rightarrow 3} = 0 = Q_{4 \rightarrow 1}$, g) $\Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0 = \Delta S_{4 \rightarrow 1}$

Paso 2.

El sistema absorbe calor durante el proceso ($1 \rightarrow 2$) puesto que el área bajo la curva que une a estos estados es positiva; por lo tanto, de la definición de rendimiento r del ciclo,

$$r = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_a} = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{1 \rightarrow 2}} = 0.35; \text{ inferimos que:}$$

$$a) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{W_{\text{neto}}}{r} = \frac{350 \text{ kJ}}{0.35} = 1000 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$, se tiene que

$$b) \quad W_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} = 1000 \text{ kJ}$$

De la definición de calor: $Q_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 T dS = T_1 \int_1^2 dS = T_1 \Delta S_{1 \rightarrow 2}$, resulta que:

$$c) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{T_1} = \frac{1000 \text{ kJ}}{600 \text{ K}} = 1.67 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que $\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1} = 0$, entonces:

$$d) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 4} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{4 \rightarrow 1}) = 0 - (1.67 + 0 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -1.67 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como para este ciclo $r = r_C$ y este último está definido como:

$$r_C = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 0.35, \quad \text{se tiene que} \quad \frac{T_3}{T_2} = 1 - r_C; \text{ de donde:}$$

$$e) \quad T_3 = T_2 (1 - r_C) = (600 \text{ K})(1 - 0.35) = 390 \text{ K} = T_4$$

De la definición de calor aplicada al proceso isotérmico (3→4) se tiene que:

$$Q_{3 \rightarrow 4} = \int_3^4 T dS = T_3 \int_3^4 dS = T_3 \Delta S_{3 \rightarrow 4} = W_{3 \rightarrow 4}, \text{ esto es:}$$

$$f) \quad Q_{3 \rightarrow 4} = T_3 \Delta S_{3 \rightarrow 4} = (390 \text{ K}) \left(-1.67 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -651.3 \text{ kJ} = W_{3 \rightarrow 4}$$

Paso 3.

Finalmente, determinamos la variación en la energía interna para el proceso (2→3):

$$a) \Delta U_{2 \rightarrow 3} = mC_v (T_3 - T_2) = (2 \text{ kg}) \left(0.74 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (390 - 600) \text{ K} = -310.8 \text{ kJ}$$

y para el proceso (4 → 1):

$$b) \Delta U_{4 \rightarrow 1} = mC_v (T_1 - T_4) = (2 \text{ kg}) \left(0.74 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 - 390) \text{ K} = 310.8 \text{ kJ}$$

Para estos procesos se tiene a partir de la ecuación de 1ª Ley:

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = -W_{i \rightarrow f} \text{ que:}$$

$$c) W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(-310.8 \text{ kJ}) = 310.8 \text{ kJ}, \text{ y}$$

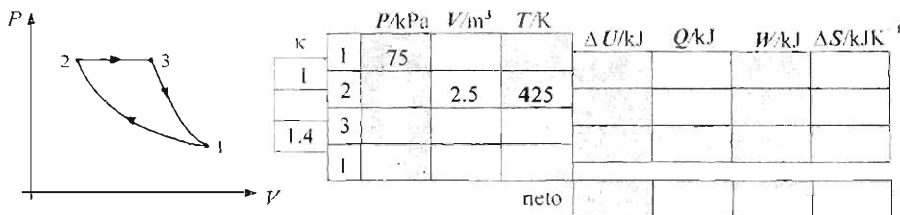
$$d) W_{4 \rightarrow 1} = -\Delta U_{4 \rightarrow 1} = -(310.8 \text{ kJ}) = -310.8 \text{ kJ}$$

		<i>T/K</i>	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1	1a	600	1b 0	2a 1000	2b 1000	2c 1.67
2	1a	600	3a -310.8	1f 0	3c 310.8	1g 0
3	2e	390	1b 0	2f -651.3	2f -651.3	2d 1.67
4	2e	390	3b 310.8	1f 0	3d -310.8	1g 0
1	1a	600				
neto			1c 0	1e 350	1e 350	1d 0

Problema 2.

3 kg de nitrógeno efectúan el ciclo mostrado en el plano PV .

a) Llenar los espacios vacíos en la tabla, b) ilustrar el ciclo en el plano ST , c) calcular el rendimiento r de ciclo.



Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 0.30 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 0.74 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

En un ciclo el cambio neto o total en cualquier variable termodinámica es igual a cero, esto es:

$$a) \quad \Delta U_{\text{neto}} = 0 \quad \text{y} \quad b) \quad \Delta S_{\text{neto}} = 0$$

Dado que $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 1$, entonces el proceso ($1 \rightarrow 2$) es isotérmico, lo cual significa que:

$$c) \quad T_1 = T_2 = 425 \text{ K} \quad , \quad d) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$$

Para el estado 1 se conoce la presión y la temperatura, por lo tanto, de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos:

$$e) \quad V_1 = \frac{mRT_1}{P_1} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.30 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (425 \text{ K})}{\left(75 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 5.1 \frac{\text{kJ}}{\text{kJ}} = 5.1 \text{ m}^3$$

Usando la ecuación de procesos politrópicos $P_1 V_1^\kappa = P_2 V_2^\kappa$, con $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 1$, $P_2 V_2 = P_1 V_1$ se determina la presión en el estado 2:

$$f) \quad P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = \frac{(75 \text{ kPa})(5.1 \text{ m}^3)}{(2.5 \text{ m}^3)} = 153 \text{ kPa}$$

Paso 2.

El diagrama PV muestra que el proceso (2→3) es isobárico, esto es que

$$a) \quad \kappa_{2 \rightarrow 3} = 0, \quad b) \quad P_3 = P_2 = 153 \text{ kPa}$$

Para el proceso (3→1) se conoce la presión y el volumen del estado 1, la presión del estado 3 y el valor del exponente politrópico; luego entonces, usando la ecuación de procesos politrópicos $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, con $\kappa_{3 \rightarrow 1} = 1.4$, $P_1 V_1^{1.4} = P_3 V_3^{1.4}$, calculamos el volumen en el estado 3:

$$c) \quad V_3 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_3} \right)^{\frac{1}{1.4}} = (5.1 \text{ m}^3) \left(\frac{75}{153} \right)^{\frac{1}{1.4}} = 3.06 \text{ m}^3$$

De la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos:

$$d) \quad T_3 = \frac{P_3 V_3}{mR} = \frac{\left(153 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right) (3.06 \text{ m}^3)}{(3 \text{ kg}) \left(0.30 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)} = 520.2 \frac{\text{kJ}}{\text{kJ/K}} = 520.2 \text{ K}$$

Paso 3.

La variación en entropía del sistema para el proceso isotérmico (1→2) se calcula mediante la relación:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = mC_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + mR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = mR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right); \text{ esto es}$$

$$a) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (3 \text{ kg}) \left(0.30 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{2.5}{5.1} \right) = -0.64 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$, de la ecuación de 1ª Ley resulta que el calor y el trabajo intercambiados por el sistema y los alrededores durante este proceso son iguales; y de la definición de calor

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 T dS = T_1 \int_1^2 dS = T_1 \Delta S_{1 \rightarrow 2}, \text{ se tiene que:}$$

$$b) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = T_1 \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (425 \text{ K}) \left(-0.64 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -272 \text{ kJ} = W_{1 \rightarrow 2}$$

Para el proceso isobárico ($2 \rightarrow 3$) calculamos:

$$c) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = m C_v (T_3 - T_2) = (3 \text{ kg}) \left(0.74 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (520.2 - 425) \text{ K} = 211.34 \text{ kJ}$$

De la definición de trabajo para el proceso ($2 \rightarrow 3$): $W_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 P dV = \int_2^3 m R dT$
se tiene que: $W_{2 \rightarrow 3} = P_3 \Delta V = m R \Delta T$; esto es

$$d) \quad W_{2 \rightarrow 3} = m R (T_3 - T_2) = (3 \text{ kg}) \left(0.30 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (520.2 - 425) \text{ K} = 85.68 \text{ kJ}$$

y de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, resulta que,

$$e) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} + W_{2 \rightarrow 3} = (211.34 + 85.68) \text{ kJ} = 297.02 \text{ kJ}$$

Se conocen R y C_v , así que: $C_p = C_v + R = 1.04 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

La variación en la entropía para el proceso ($2 \rightarrow 3$) está dada como:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = m C_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) - m R \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = m C_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right)$$

$$f) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = (3 \text{ kg}) \left(1.04 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{520.2}{425} \right) = 0.64 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 4.

Dado que para el proceso ($3 \rightarrow 1$) el exponente politrópico está dado como $\kappa_{3 \rightarrow 1} = \frac{C_p}{C_v}$, entonces, este proceso resulta ser isoentrópico, lo cual quiere decir que:

$$a) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 1} = 0, \quad b) \quad Q_{3 \rightarrow 1} = 0$$

La variación en la energía interna del sistema es:

$$c) \Delta U_{3 \rightarrow 1} = m C_v (T_1 - T_3) = (3 \text{ kg}) \left(0.74 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (425 - 520.2) \text{ K} = -211.34 \text{ kJ}$$

y de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$ resulta que:

$$d) W_{3 \rightarrow 1} = -\Delta U_{3 \rightarrow 1} = -(-211.34 \text{ kJ}) = 211.34 \text{ kJ}$$

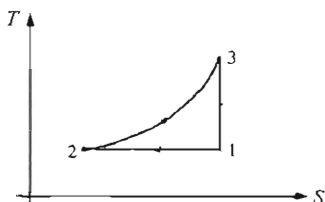
Aplicando la ecuación de 1ª Ley al ciclo $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, se tiene que:

$$e) Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 1} = (-272 + 85.68 + 211.34) \text{ kJ} = 25.02 \text{ kJ}$$

Paso 5.

El rendimiento r del ciclo lo determinamos mediante la ecuación:

$$a) r = 1 - \frac{Q_c}{Q_o} = 1 - \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{Q_{2 \rightarrow 3}} = 1 - \frac{272 \text{ kJ}}{297.02 \text{ kJ}} = 0.084 = 8.4\%$$

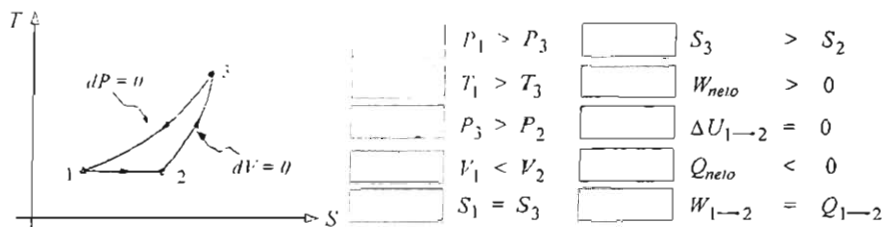


		P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
κ 1 2a 0 1.4	1	75	1e 5.1	1c 425	1d 0	3b -272	3b -272	3a -0.64
	2	1f 153	2.5	425	3c 211.34	3e 297.02	3d 85.68	3f 0.64
	3	2b 153	2c 3.06	2d 520.2	4c -211.34	4b 0	4d 211.34	4a 0
	1	75	1e 5.1	1c 425				
neto					1a 0	4e 25.02	4e 25.02	1b 0

Problema 3.

Un gas ideal experimenta los procesos politrópicos mostrados en el plano ST .

a) Esbozar el diagrama del ciclo en el plano TP . b) clasificar como verdadera (V) o falsa (F) cada una de las relaciones indicadas.



Solución:

El diagrama ST ilustrado, nos permite inferir directamente el nombre del proceso, comparar el valor de: la temperatura, la energía interna y la entropía en cada estado por los que pasa el sistema; también se infiere directamente el signo del calor intercambiado entre el sistema y los alrededores; todo esto se detalla a continuación:

Paso 1.

El proceso $(1 \rightarrow 2)$ es isotérmico y está caracterizado por:

a) $T_2 = T_1$, b) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} > 0$, c) $S_2 > S_1$, d) $Q_{1 \rightarrow 2} > 0$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$, resulta que:

e) $W_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2}$

Como para este proceso el calor y el trabajo son iguales y del inciso (1d) el calor es positivo, entonces f) $W_{1 \rightarrow 2} > 0$, lo cual nos indica que g) $V_2 > V_1$

La representación de este proceso en el plano VP es mediante una curva tipo hipérbola en la que, dado que el volumen está aumentando, la presión habrá de disminuir; por lo que:

h) $P_2 < P_1$

Paso 2.

El proceso $(2 \rightarrow 3)$ es isocórico y tiene las siguientes características:

a) $V_3 = V_2$, b) $T_3 > T_2$, c) $S_3 > S_2$, d) $Q_{2 \rightarrow 3} > 0$

Este proceso se representa en el plano VP mediante una recta paralela al eje de la presión en la que, dado que la temperatura aumenta, la presión aumenta también, por lo que:

e) $P_3 > P_2$, f) $W_{2 \rightarrow 3} = 0$

Paso 3.

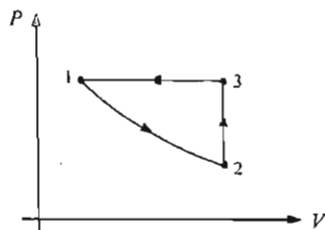
El proceso $(3 \rightarrow 1)$ es isobárico y está caracterizado por:

a) $P_1 = P_3$, b) $T_1 < T_3$, c) $S_1 < S_3$, d) $Q_{3 \rightarrow 1} < 0$

La representación de este proceso en el plano VP es mediante una recta paralela al eje de volumen en la que como la temperatura está disminuyendo, el volumen disminuirá también, por lo que: f) $V_1 < V_3$, g) $W_{3 \rightarrow 1} < 0$

Paso 4.

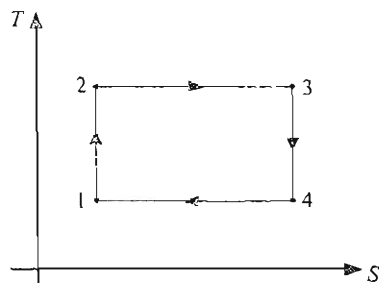
Finalmente, dado que en un ciclo la variación neta en energía interna es igual a cero, el calor y el trabajo netos son iguales de aquí que sumando las áreas bajo las curvas que unen a los estados $(1 \rightarrow 2)$, $(2 \rightarrow 3)$ y $(3 \rightarrow 1)$ en el plano VP se obtiene el trabajo neto. Este último es negativo dado que $W_{3 \rightarrow 1}$, que es negativo, resulta ser mayor que $W_{1 \rightarrow 2}$, que es positivo, y $W_{2 \rightarrow 3} = 0$. Esto es que a) $W_{neto} < 0$ y por lo tanto b) $Q_{neto} < 0$.



F (3a)	$P_1 > P_3$	V (2c)	$S_3 > S_2$
F (3b)	$T_1 > T_3$	F (4a)	$W_{neto} > 0$
V (2e)	$P_3 > P_2$	V (1b)	$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$
V (1g)	$V_1 < V_2$	V (4b)	$Q_{neto} < 0$
F (3c)	$S_1 = S_3$	V (1e)	$W_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2}$

Problema 1.

3 kg de helio efectúan un ciclo de Carnot absorbiendo 1500 kJ de calor a la temperatura de 600 K. a) Llenar la tabla, b) calcular el rendimiento r_C del ciclo.



	T/K	$\Delta U/kJ$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/kJK^{-1}$
1					
2					
3					
4	420				
1					
neto					

Datos: $m = 3$ kg, $R = 2.08$ kJ/kgK, $C_p = 5.20$ kJ/kgK

Solución:

Paso 1.

El diagrama ST del ciclo muestra que el sistema intercambia calor con los alrededores durante los procesos $(2 \rightarrow 3)$ y $(4 \rightarrow 1)$ y el signo correspondiente depende de si la entropía aumenta o disminuye. Dado que para el proceso $(2 \rightarrow 3)$ la entropía está aumentando, entonces durante este proceso el sistema absorbe calor, es decir que

$$a) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = 1500 \text{ kJ} \quad \text{y} \quad b) \quad T_3 = T_2 = T_{\max} = 600 \text{ K}$$

Además, como para este proceso la temperatura es constante; entonces,

$$c) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0 = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}, \quad \text{por lo tanto:} \quad d) \quad W_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} = 1500 \text{ kJ}$$

Aplicando la definición de calor: $Q_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 T dS = T_2 \int_2^3 dS = T_2 \Delta S_{2 \rightarrow 3}$, resulta que:

$$e) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = \frac{Q_{2 \rightarrow 3}}{T_2} = \frac{1500 \text{ kJ}}{600 \text{ K}} = 2.5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 2.

El proceso $(4 \rightarrow 1)$ ocurre a la temperatura constante,

$$a) \quad T_1 = T_4 = T_{\min} = 420 \text{ K}$$

El rendimiento del ciclo es:

$$b) \quad r_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \frac{420 \text{ K}}{600 \text{ K}} = 0.30 = 30 \%$$

Pero también $r = r_c = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_1} = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{2 \rightarrow 3}} = 0.30$; de aquí que,

$$c) \quad W_{\text{neto}} = r Q_{2 \rightarrow 3} = (0.30)(1500 \text{ kJ}) = 450 \text{ kJ}$$

En un ciclo la variación neta en la energía interna del sistema es: $d) \quad \Delta U_{\text{neto}} = 0$, y aplicando la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$ se tiene que:

$$e) \quad Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}} = 450 \text{ kJ}$$

También en un ciclo, la variación neta en la entropía del sistema es: $f) \quad \Delta S_{\text{neto}} = 0$

Paso 3.

Los procesos (1→2) y (3→4) son isoentrópicos, lo que significa que:

$$a) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = 0 = Q_{3 \rightarrow 4} , \quad b) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0 = \Delta S_{3 \rightarrow 4}$$

Como $\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1} = 0$, entonces:

$$c) \quad \Delta S_{4 \rightarrow 1} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4}) = 0 - (0 + 2.5 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -2.5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Para el proceso isotérmico (4→1) se tiene que: $d) \quad \Delta U_{4 \rightarrow 1} = 0 = Q_{4 \rightarrow 1} - W_{4 \rightarrow 1}$
por lo que $Q_{4 \rightarrow 1} = W_{4 \rightarrow 1}$

Aplicando la definición de calor a este proceso:

$$Q_{4 \rightarrow 1} = \int_4^1 T dS = T_4 \int_4^1 dS = T_4 \Delta S_{4 \rightarrow 1} = W_{4 \rightarrow 1}$$

se tiene que: $e) \quad Q_{4 \rightarrow 1} = T_4 \Delta S_{4 \rightarrow 1} = (420 \text{ K}) \left(-2.5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -1050 \text{ kJ} = W_{4 \rightarrow 1}$

Paso 4.

Dado que $C_p = C_v + R$, entonces: $C_v = C_p - R = 3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

Finalmente, determinamos la variación en la energía interna para el proceso (1→2):

$$a) \Delta U_{1 \rightarrow 2} = m C_v (T_2 - T_1) = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 - 420) \text{ K} = 1684.8 \text{ kJ}$$

y para el proceso (3→4):

$$b) \Delta U_{3 \rightarrow 4} = m C_v (T_4 - T_3) = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (420 - 600) \text{ K} = -1684.8 \text{ kJ}$$

Para los procesos isoentrópicos (1→2) y (3→4) se tiene a partir de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = -W_{i \rightarrow f}$, se tiene que:

$$c) W_{1 \rightarrow 2} = -\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -(1684.8 \text{ kJ}) = -1684.8 \text{ kJ}, \text{ y}$$

$$d) W_{3 \rightarrow 4} = -\Delta U_{3 \rightarrow 4} = -(-1684.8 \text{ kJ}) = 1684.8 \text{ kJ}$$

		T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1	2a	420	4a 1684.8	3a 0	4c 1684.8	3b 0
2	1b	600	1c 0	1a 1500	1d 1500	1e 2.5
3	1b	600	4b -1684.8	3a 0	4d 1684.8	3b 0
4		420	3d 0	3e -1050	3e -1050	3c -2.5
1	2a	420				
neto			2d 0	2e 450	2c 450	2f 0

Problema 2.

Un sistema que consta de 2 kg de helio, inicialmente a 200 kPa y 450 K realiza un ciclo formado por los siguientes procesos:

A entropía constante, su temperatura disminuye en 150 K; a continuación ocurre un proceso isotérmico; regresa al estado inicial en forma isocórica.

a) Llenar la tabla, b) esbozar el diagrama del ciclo en los planos VP y ST ; calcular: c) el rendimiento r del ciclo y d) el rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas.

	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1							
2							
3							
1							
neto							

Datos: $m = 2 \text{ kg}$, $R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$, $C_p = 5.20 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Conocidos la presión y temperatura en el estado inicial 1, de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ determinamos:

$$a) \quad V_1 = \frac{mRT_1}{P_1} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (450 \text{ K})}{\left(200 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 9.36 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 9.36 \text{ m}^3$$

El sistema pasa del estado 1 al 2 mediante un proceso a entropía constante en el que su temperatura disminuye en 150 K, esto significa que:

$$b) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0, \quad c) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \text{y} \quad \Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 = -150 \text{ K}; \text{ de donde:}$$

$$d) \quad T_2 = T_1 + \Delta T_{1 \rightarrow 2} = (450 - 150) \text{ K} = 300 \text{ K}$$

$$\text{Se conocen } R \text{ y } C_p, \text{ así que: } C_v = C_p - R = 3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

El cambio en la energía interna del sistema durante este proceso es igual a:

$$e) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = mC_v (T_2 - T_1) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 - 450) \text{ K} = -936 \text{ kJ}$$

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, resulta que:

$$f) \quad W_{1 \rightarrow 2} = -\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -(-936 \text{ kJ}) = 936 \text{ kJ}$$

Como el proceso (1→2) es isoentrópico, de la ecuación

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = mC_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + mR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 0, \text{ se tiene}$$

$$mR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -mC_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right); \text{ esto es: } \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\left(\frac{C_v}{R}\right) \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-(C_v/R)},$$

$$\text{por lo tanto: } \left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-(C_v/R)}; \text{ de donde}$$

$$g) \quad V_2 = V_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-(C_v/R)} = (9.36 \text{ m}^3) \left(\frac{300}{450}\right)^{-(3.12/2.08)} = 17.19 \text{ m}^3$$

Mediante la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$, calculamos:

$$h) \quad P_2 = \frac{mRT_2}{V_2} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right) (300 \text{ K})}{(17.19 \text{ m}^3)} = 72.60 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 72.60 \text{ kPa}$$

Paso 2.

Mediante un proceso isotérmico el sistema pasa del estado 2 al 3, esto significa que:

$$a) \quad T_3 = T_2 = 300 \text{ K}, \quad b) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0$$

Como el sistema regresa al estado inicial mediante un proceso isocórico, entonces,

$$c) \quad V_3 = V_1 = 9.36 \text{ m}^3, \quad d) \quad W_{3 \rightarrow 1} = 0$$

Usando la ecuación de procesos politrópicos $P_3 V_3^\kappa = P_2 V_2^\kappa$ con $\kappa_{2 \rightarrow 3} = 1$ se tiene que:

$P_3V_3 = P_2V_2$, de donde:

$$e) \quad P_3 = \frac{P_2 V_2}{V_3} = \frac{(72.60 \text{ kPa})(17.19 \text{ m}^3)}{(9.36 \text{ m}^3)} = 133.33 \text{ kPa}$$

La variación en entropía del sistema durante el proceso isotérmico (2→3) se calcula a través de la ecuación:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = mC_v \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + mR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = mR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$$

$$f) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = (2 \text{ kg})\left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right) \ln\left(\frac{9.36}{17.19}\right) = -2.53 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Finalmente, como $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0$, el calor y el trabajo intercambiados por el sistema y los alrededores durante este proceso son iguales; y de la definición de calor se tiene:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 T dS = T_3 \int_2^3 dS = T_3 \Delta S_{2 \rightarrow 3}; \text{ esto es que}$$

$$g) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = T_3 \Delta S_{2 \rightarrow 3} = (300 \text{ K})\left(-2.53 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}\right) = -759 \text{ kJ} = W_{2 \rightarrow 3}$$

Paso 3.

Debido a que en un ciclo la variación total en cualquier variable termodinámica es igual a cero, entonces a) $\Delta U_{nclo} = 0 = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1}$; de donde

$$b) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{nclo} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (-936 + 0) \text{ kJ} = 936 \text{ kJ}$$

También, c) $\Delta S_{nclo} = 0 = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 1}$; luego entonces

$$d) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 1} = \Delta S_{nclo} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (0 - 2.53) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 2.53 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$ al proceso isocórico (3→1), se obtiene:

$$e) \quad Q_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{3 \rightarrow 1} = 936 \text{ kJ}$$

Paso 4.

Dado que $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, entonces $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}}$, por lo tanto:

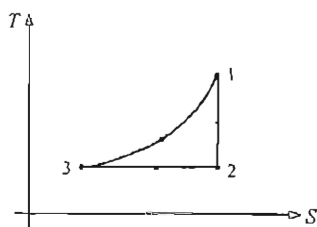
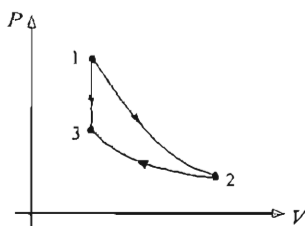
$$a) \quad Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = (0 - 759 + 936) \text{ kJ} = 177 \text{ kJ} = W_{\text{neto}}$$

El rendimiento r del ciclo se determina mediante la ecuación:

$$b) \quad r = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_a} = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{3 \rightarrow 1}} = \frac{177 \text{ kJ}}{936 \text{ kJ}} = 0.1891 = 18.91\%$$

y el rendimiento r_c de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas es:

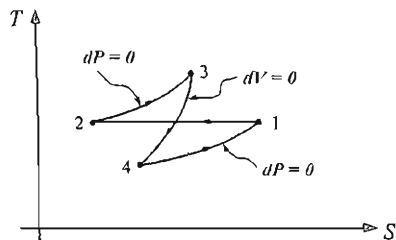
$$c) \quad r_c = \left(1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}\right) = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \left(1 - \frac{300}{450}\right) = 0.3333 = 33.33\%$$



	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1	200	9.36	450	$1e - 936$	$1c \quad 0$	$1f \quad 936$	$1b \quad 0$
2	$1h \quad 72.60$	$1g \quad 17.19$	$1d \quad 300$	$2b \quad 0$	$2g - 759$	$2g - 759$	$2f - 2.53$
3	$2e \quad 133.33$	$2c \quad 9.36$	$2a \quad 300$	$3b \quad 936$	$3e \quad 936$	$2d \quad 0$	$3d \quad 2.53$
1	200	9.36	450				
neto				$3a \quad 0$	$4a \quad 177$	$4a \quad 177$	$3c \quad 0$

Problema 3.

Un gas ideal experimenta los siguientes procesos politrópicos mostrados en el diagrama ST . Escribir el signo correspondiente ($>$, $=$, $<$) entre cada pareja de relaciones.



P_3	P_4	$W_{1 \rightarrow 2}$	$Q_{1 \rightarrow 2}$
P_2	P_1	$W_{4 \rightarrow 1}$	0
V_1	V_4	$\Delta S_{1 \rightarrow 2}$	0
V_2	V_4	$Q_{3 \rightarrow 4}$	0
V_3	V_1	$W_{2 \rightarrow 3}$	$Q_{2 \rightarrow 3}$

Solución:

El diagrama ST ilustrado, nos permite inferir directamente el nombre del proceso, comparar el valor de: la temperatura, la energía interna y la entropía en cada estado por los que pasa el sistema; también se infiere directamente el signo del calor intercambiado entre el sistema y los alrededores; todo esto se detalla a continuación:

Paso 1.

El proceso ($1 \rightarrow 2$) es isotérmico y está caracterizado por:

a) $T_2 = T_1$, b) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$, c) $S_2 < S_1$, d) $\Delta S_{1 \rightarrow 2} < 0$, e) $Q_{1 \rightarrow 2} < 0$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$ a este proceso resulta que,

f) $W_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2}$

Como para este proceso el calor y el trabajo son iguales y del inciso (1e) el calor es negativo, entonces

g) $W_{1 \rightarrow 2} < 0$, lo cual nos indica que h) $V_2 < V_1$

La representación de este proceso en el plano VP es mediante una curva tipo hipérbola en la que, dado que el volumen está disminuyendo, la presión habrá de aumentar; por lo que:

i) $P_2 > P_1$

Paso 2.

El proceso ($2 \rightarrow 3$) es isobárico y está caracterizado por:

a) $P_3 = P_2$, b) $T_3 > T_2$, c) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} > 0$, d) $S_3 > S_2$, e) $Q_{2 \rightarrow 3} > 0$

Este proceso se representa en el plano VP mediante una recta paralela al eje de volumen en la que dado que la temperatura está aumentando, el volumen aumentará también, por lo que:

$$f) \quad V_3 > V_2, \quad g) \quad W_{2 \rightarrow 3} > 0$$

El cambio en energía interna está dado como: $h) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = mC_V(T_3 - T_2)$, la cual es positiva debido a que $T_3 > T_2$.

De la definición de trabajo: $W_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 P dV = \int_2^3 mRdT$ se tiene que

$$i) \quad W_{2 \rightarrow 3} = mR\Delta T = mR(T_3 - T_2), \text{ que también es positiva.}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$ obtenemos que

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} + W_{2 \rightarrow 3};$$

Sustituyendo en esta expresión el resultado de los incisos (h) e (i) se tiene que:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = mC_V(T_3 - T_2) + mR(T_3 - T_2) = m(C_V + R)(T_3 - T_2), \text{ pero como } C_p = C_V + R,$$

resulta entonces que

$$j) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = mC_p(T_3 - T_2)$$

De la comparación de los incisos (i) y (j) concluimos que:

$$k) \quad W_{2 \rightarrow 3} < Q_{2 \rightarrow 3} \text{ porque } mR < mC_p.$$

Paso 3.

El proceso (3→4) es isocórico y tiene las siguientes características:

$$a) \quad V_4 = V_3, \quad b) \quad T_4 < T_3, \quad c) \quad S_4 < S_3, \quad d) \quad Q_{3 \rightarrow 4} < 0$$

Este proceso se representa en el plano VP mediante una recta paralela al eje de la presión en la que, dado que la temperatura disminuye, la presión disminuye también, por lo que:

$$e) \quad P_4 < P_3, \quad f) \quad W_{3 \rightarrow 4} = 0$$

Paso 4.

El proceso (4→1) es isobárico y está caracterizado por:

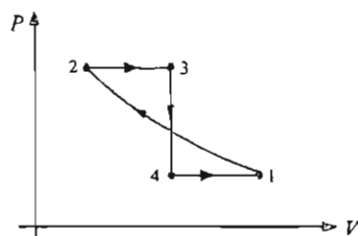
a) $P_1 = P_4$, b) $T_1 > T_4$, c) $S_1 > S_4$, d) $Q_{4\rightarrow 1} > 0$

La representación de este proceso en el plano VP es a través de una recta paralela al eje de volumen en la que dado que la temperatura está aumentando, el volumen aumentará también, por lo que:

e) $V_1 > V_4$, f) $W_{4\rightarrow 1} > 0$

El diagrama del ciclo en el plano VP nos permite hacer la comparación que nos conduce a concluir que:

g) $V_2 < V_4$ y h) $V_3 < V_1$



(3e) $P_3 > P_4$

(1i) $P_2 > P_1$

(4e) $V_1 > V_4$

(4g) $V_2 < V_4$

(4h) $V_3 < V_1$

(1f) $W_{1\rightarrow 2} = Q_{1\rightarrow 2}$

(4f) $W_{4\rightarrow 1} > 0$

(1d) $\Delta S_{1\rightarrow 2} < 0$

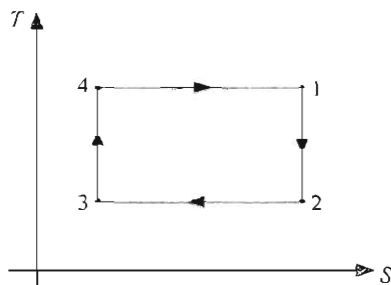
(3d) $Q_{3\rightarrow 4} < 0$

(2k) $W_{2\rightarrow 3} < Q_{2\rightarrow 3}$

Problema 1.

6 kg de aire efectúan el ciclo mostrado en el plano ST .

a) Llenar los espacios vacíos en la tabla, b) calcular el rendimiento r_C del ciclo.



	T/K	$\Delta U/kJ$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/kJK^{-1}$
1					
2	300				
3					-3
4	500				
1					
neto					

Datos: $m = 6 \text{ kg}$, $R = 0.287 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 0.72 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Como se observa en el plano ST los procesos $(2 \rightarrow 3)$ y $(4 \rightarrow 1)$ ocurren a temperatura constante, luego entonces,

$$a) \quad T_1 = T_4 = T_{\text{máx}} = 500 \text{ K}, \quad b) \quad T_3 = T_2 = T_{\text{mín}} = 300 \text{ K}, \quad c) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0 = \Delta U_{4 \rightarrow 1}$$

$$\text{En un ciclo se cumple que: } d) \quad \Delta U_{\text{neto}} = 0, \quad e) \quad \Delta S_{\text{neto}} = 0$$

Los procesos $(1 \rightarrow 2)$ y $(3 \rightarrow 4)$ son isoentrópicos, lo que significa que:

$$f) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = 0 = Q_{3 \rightarrow 4}, \quad g) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0 = \Delta S_{3 \rightarrow 4}$$

Como $\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1} = 0$; entonces:

$$h) \quad \Delta S_{4 \rightarrow 1} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4}) = 0 - (0 - 3 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 2.

Determinamos la variación en la energía interna para el proceso $(1 \rightarrow 2)$:

$$a) \Delta U_{1 \rightarrow 2} = mC_V (T_2 - T_1) = (6 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 - 500) \text{ K} = -864 \text{ kJ}$$

Dado que $\Delta U_{\text{neto}} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 4} + \Delta U_{4 \rightarrow 1} = 0$; entonces:

$$\Delta U_{3 \rightarrow 4} = \Delta U_{\text{neto}} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{4 \rightarrow 1}) , \text{ esto es que}$$

$$b) \Delta U_{3 \rightarrow 4} = 0 - (-864 + 0 + 0) \text{ kJ} = 864 \text{ kJ}$$

Para los procesos isoentrópicos (1→2) y (3→4) se tiene de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = -W_{i \rightarrow f}$, que:

$$c) W_{1 \rightarrow 2} = -\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -(-864 \text{ kJ}) = 864 \text{ kJ} , \text{ y}$$

$$d) W_{3 \rightarrow 4} = -\Delta U_{3 \rightarrow 4} = -(864 \text{ kJ}) = -864 \text{ kJ}$$

Paso 3.

Dado que para los procesos isotérmicos (2→3) y (4→1) la variación en energía interna es igual a cero, entonces de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = 0$ resulta que el calor y el trabajo intercambiados entre el sistema y los alrededores es igual, y aplicando la definición de calor a estos procesos

$$Q_{i \rightarrow f} = \int_i^f T dS = T_i \int_i^f dS = T_i \Delta S_{i \rightarrow f} = W_{i \rightarrow f} \text{ se tiene:}$$

$$a) Q_{2 \rightarrow 3} = T_2 \Delta S_{2 \rightarrow 3} = (300 \text{ K}) \left(-3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -900 \text{ kJ} = W_{2 \rightarrow 3}$$

$$b) Q_{4 \rightarrow 1} = T_4 \Delta S_{4 \rightarrow 1} = (500 \text{ K}) \left(3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = 1500 \text{ kJ} = W_{4 \rightarrow 1}$$

Paso 4.

La suma del calor intercambiados entre el sistema y los alrededores durante cada proceso nos da el calor neto: $Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1}$, por lo que:

$$a) \quad Q_{\text{neto}} = (0 - 900 + 0 + 1500) \text{ kJ} = 600 \text{ kJ}$$

De la ecuación de la 1ª Ley de la Termodinámica $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$ se concluye que

$$b) \quad W_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} = 600 \text{ kJ}$$

Finalmente, el rendimiento de este ciclo de Carnot es igual a:

$$c) \quad r_c = 1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} = 1 - \frac{T_c}{T_a} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{500 \text{ K}} = 0.40 = 40\%$$

		T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1	1a	500	2a	1f	2c	1g
2		300	-864	0	864	0
3	1b	300	1c	3a	3a	-3
			0	-900	-900	
4		500	2b	1f	2d	1g
			864	0	-864	0
1	1a	500	1c	3b	3b	3
			0	1500	1500	
neto			1d	4a	4b	1e
			0	600	600	0

Problema 2.

6 kg de aire inicialmente a 450 K y 8 m³ efectúan un ciclo del que solo se conocen las cantidades indicadas en la tabla.

a) Llenar los espacios vacíos en la tabla. b) esbozar el diagrama del ciclo en los planos V/P y S/T ; calcular: c) el rendimiento r del ciclo y d) el rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas.

κ		P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
∞	1							
	2				-648			
	3							0
1	1							
neto								

Datos: $m = 6 \text{ kg}$, $R = 0.287 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 0.72 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

El exponente politrópico $\kappa_{1 \rightarrow 2} = \infty$ nos indica que el proceso (1 \rightarrow 2) es isocórico, esto es:

$$a) \quad V_2 = V_1 = 8 \text{ m}^3. \quad b) \quad W_{1 \rightarrow 2} = 0$$

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, se tiene que:

$$c) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = -648 \text{ kJ}$$

De la relación: $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = mC_V(T_2 - T_1)$, calculamos:

$$d) \quad T_2 = T_1 + \frac{\Delta U_{1 \rightarrow 2}}{mC_V} = (450 \text{ K}) + \left(\frac{-648 \text{ kJ}}{(6 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)} \right) = 300 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 300 \text{ K}$$

Determinamos la variación en la entropía del sistema para este proceso mediante la ecuación:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = mC_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + mR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = mC_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right);$$

$$e) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (6 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{300}{450} \right) = -1.75 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Finalmente, de la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos las presiones:

$$f) P_1 = \frac{mRT_1}{V_1} = \frac{(6 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (450 \text{ K})}{(8 \text{ m}^3)} = 96.86 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 96.86 \text{ kPa}$$

$$g) P_2 = \frac{mRT_2}{V_2} = \frac{(6 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 \text{ K})}{(8 \text{ m}^3)} = 64.57 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 64.57 \text{ kPa}$$

Paso 2.

Como $\Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0$, el proceso (2→3) es isoentrópico, por lo que: a) $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$

$$b) \kappa_{2 \rightarrow 3} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = \frac{1.007}{0.72} = 1.4$$

Se sabe que $\kappa_{3 \rightarrow 1} = 1$, por lo tanto el proceso (3→1) es isotérmico, lo cual significa que:

$$c) T_3 = T_1 = 450 \text{ K}, \quad d) \Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0$$

Debido a que en un ciclo la variación total en cualquier variable termodinámica es igual a cero, entonces

$$e) \Delta U_{neto} = 0 = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1}; \text{ de donde}$$

$$f) \Delta U_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{neto} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{3 \rightarrow 1}) = 0 - (-648 + 0) \text{ kJ} = 648 \text{ kJ}$$

$$\text{También, } g) \Delta S_{neto} = 0 = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 1}; \text{ de donde}$$

$$h) \Delta S_{3 \rightarrow 1} = \Delta S_{neto} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (-1.75 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 1.75 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 3.

La aplicación de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3} = -W_{2 \rightarrow 3}$ al proceso isoentrópico (2→3) da como resultado que:

$$a) W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(648 \text{ kJ}) = -648 \text{ kJ}$$

Como $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0$, el calor y el trabajo intercambiados por el sistema y los alrededores durante este proceso son iguales; y de la definición de calor se tiene

$$Q_{3 \rightarrow 1} = \int_3^1 T dS = T_3 \int_3^1 dS = T_3 \Delta S_{3 \rightarrow 1} = W_{3 \rightarrow 1}; \text{ esto es que}$$

$$b) \quad Q_{3 \rightarrow 1} = T_3 \Delta S_{3 \rightarrow 1} = (450 \text{ K}) \left(1.75 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = 787.5 \text{ kJ} = W_{3 \rightarrow 1}$$

Dado que $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, entonces $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}}$, y

$$c) \quad Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = (-648 + 0 + 787.5) \text{ kJ} = 139.5 \text{ kJ} = W_{\text{neto}}$$

Paso 4.

Se conocen R y C_v , así que $C_p = C_v + R = 1.007 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

$$\text{Como } \Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0, \text{ de la ecuación } \Delta S_{2 \rightarrow 3} = m C_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) - m R \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = 0,$$

$$\text{se tiene que: } m R \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = m C_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right); \text{ esto es: } \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = \left(\frac{C_p}{R} \right) \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right)$$

$$\text{por lo tanto: } \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{(C_p/R)}; \text{ de donde:}$$

$$a) \quad P_3 = P_2 \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{(C_p/R)} = (64.57 \text{ kPa}) \left(\frac{450}{300} \right)^{(1.007/0.287)} = 267.84 \text{ kPa}$$

Usando la ecuación de procesos politrópicos $P_3 V_3^\kappa = P_1 V_1^\kappa$ con $\kappa = 1$ se tiene que $P_3 V_3 = P_1 V_1$ de donde:

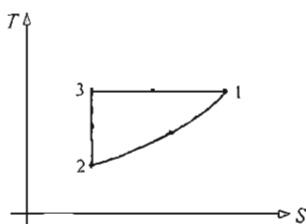
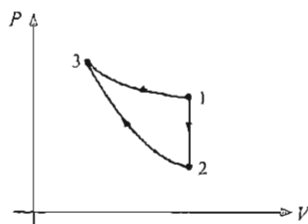
$$b) \quad V_3 = \frac{P_1 V_1}{P_3} = \frac{(96.86 \text{ kPa})(8 \text{ m}^3)}{(267.84 \text{ kPa})} = 2.89 \text{ m}^3$$

El rendimiento r del ciclo lo determinamos mediante la ecuación:

$$b) \quad r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{Q_{3 \rightarrow 1}} = 1 - \frac{648 \text{ kJ}}{787.5 \text{ kJ}} = 0.1771 = 17.71\%$$

y el rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas es:

$$c) \quad r_C = \left(1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}\right) = \left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right) = \left(1 - \frac{300}{450}\right) = 0.3333 = 33.33\%$$

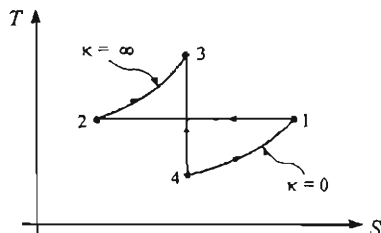


κ		P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
∞	1	$1f$ 96.86	8	450	-648	$1c$ -648	$1b$ 0	$1e$ -1.75
	2	$1g$ 64.57	$1a$ 8	$1d$ 300		$2a$ 0	$3a$ -648	0
$2b$ 1.4	3	$4a$ 267.84	$4b$ 2.89	$2c$ 450	$2d$ 0	$3b$ 787.5	$3b$ 787.5	$2h$ 1.75
1	1	$1f$ 96.86	8	450				
neto					$2e$ 0	$3c$ 139.5	$3c$ 139.5	$2g$ 0

Problema 3.

Un gas ideal experimenta los cambios politrópicos mostrados en el plano ST .

Indicar para cada par de relaciones a la derecha del diagrama el signo correspondiente ($>$, $=$, $<$).



V_3	V_4	$Q_{1 \rightarrow 2}$	$W_{1 \rightarrow 2}$
P_4	P_1	$W_{4 \rightarrow 1}$	0
P_2	P_4	$W_{3 \rightarrow 4}$	0
V_1	V_2	$W_{1 \rightarrow 2}$	$W_{2 \rightarrow 3}$
P_2	P_1	S_3	S_4

Solución:

El diagrama ST ilustrado, nos permite inferir directamente el nombre del proceso, comparar el valor de: la temperatura, la energía interna y la entropía en cada estado por los que pasa el sistema; también se infiere directamente el signo del calor intercambiado entre el sistema y los alrededores; todo esto se detalla a continuación:

Paso 1.

El proceso $(1 \rightarrow 2)$ es isotérmico y está caracterizado por:

a) $T_2 = T_1$, b) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$, c) $S_2 < S_1$, d) $Q_{1 \rightarrow 2} < 0$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$, resulta que

e) $W_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2}$

Como para este proceso el calor y el trabajo son iguales y del inciso (1d) el calor es negativo, entonces

f) $W_{1 \rightarrow 2} < 0$, lo cual nos indica que g) $V_2 < V_1$

La representación de este proceso en el plano VP es mediante una curva tipo hipérbola en la que, dado que el volumen está disminuyendo, la presión habrá de aumentar; por lo que

h) $P_2 > P_1$

Paso 2.

El proceso (2→3) es isocórico y tiene las siguientes características:

$$a) V_3 = V_2, \quad b) T_3 > T_2, \quad c) S_3 > S_2, \quad d) Q_{2 \rightarrow 3} > 0$$

Este proceso se representa en el plano VP mediante una recta paralela al eje de la presión en la que, dado que la temperatura aumenta, la presión aumenta también, por lo que

$$e) P_3 > P_2, \quad f) W_{2 \rightarrow 3} = 0$$

Paso 3.

El proceso (3→4) es isoentrópico y está caracterizado por:

$$a) T_4 < T_3, \quad b) \Delta U_{3 \rightarrow 4} < 0, \quad c) S_4 = S_3, \quad d) Q_{3 \rightarrow 4} = 0$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4}$, resulta que:

$$W_{3 \rightarrow 4} = -\Delta U_{3 \rightarrow 4} = -(-\Delta U_{3 \rightarrow 4}) = \Delta U_{3 \rightarrow 4} > 0, \text{ esto es que,}$$

$$e) W_{3 \rightarrow 4} > 0 \text{ y de este inciso se infiere que: } f) V_4 > V_3$$

Este proceso se representa en el plano VP mediante una curva tipo hipérbola en la que, dado que el volumen está aumentando, la presión habrá de disminuir; por lo que

$$g) P_4 < P_3$$

Paso 4.

El proceso (4→1) es isobárico y tiene las siguientes características:

$$a) P_1 = P_4, \quad b) T_1 > T_4, \quad c) S_1 > S_4, \quad d) Q_{4 \rightarrow 1} > 0$$

La representación de este proceso en el plano VP es a través de una recta paralela al eje de volumen en la que dado que la temperatura está aumentando, el volumen aumentará también, por lo que

$$e) V_1 > V_4, \quad f) W_{4 \rightarrow 1} > 0$$

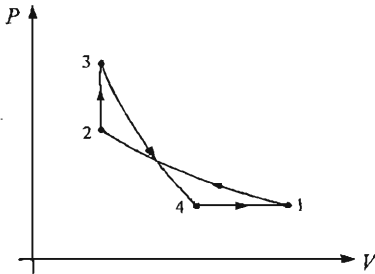
El diagrama del ciclo en el plano VP nos permite hacer la comparación que nos conduce a concluir que

$$f) \quad P_2 > P_4$$

Paso 5.

Del inciso (2f) el trabajo durante el proceso (2→3) es igual a cero, en tanto que para el proceso (1→2) el trabajo es no nulo (y negativo porque el volumen disminuye). Por lo tanto, la comparación, en valor absoluto, del trabajo realizado en estos procesos nos permite inferir que,

$$a) \quad |W_{1 \rightarrow 2}| > |W_{2 \rightarrow 3}|$$



$$(3f) \quad V_3 < V_4$$

$$(4a) \quad P_4 = P_1$$

$$(4f) \quad P_2 > P_4$$

$$(1g) \quad V_1 > V_2$$

$$(1h) \quad P_2 > P_1$$

$$(1e) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}$$

$$(4f) \quad W_{4 \rightarrow 1} > 0$$

$$(3e) \quad W_{3 \rightarrow 4} > 0$$

$$(5a) \quad W_{1 \rightarrow 2} > W_{2 \rightarrow 3}$$

$$(3c) \quad S_3 = S_4$$

Problema 1.

3 kg de aire inicialmente a 250 kPa y 581 K experimentan los siguientes cambios: en forma isocórica su temperatura aumenta en 100 K; regresan al estado inicial después de un cambio isentrópico seguido de uno isobárico.

a) Llenar la tabla, b) esbozar el diagrama del ciclo en los planos VP y ST ; calcular: c) el rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas.

	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1							
2							
3							
1							
neto							

Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 0.287 \text{ kJ/kgK}$, $C_v = 0.72 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Con los datos de la presión y la temperatura en el estado inicial 1, a través de la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$, se determina el volumen en el estado inicial, esto es:

$$a) \quad V_1 = \frac{mRT_1}{P_1} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (581 \text{ K})}{\left(250 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 2.0 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 2.0 \text{ m}^3$$

El sistema pasa del estado 1 al 2 mediante un proceso isocórico en el que su temperatura aumenta en 100 K ; esto significa que:

$$b) \quad V_2 = V_1 = 2 \text{ m}^3, \quad c) \quad W_{1 \rightarrow 2} = 0,$$

$$\Delta T_{1 \rightarrow 2} = 100 \text{ K} = T_2 - T_1; \text{ de donde: } d) \quad T_2 = T_1 + \Delta T_{1 \rightarrow 2} = (581 + 100) \text{ K} = 681 \text{ K}$$

De la ecuación de estado de gas ideal determinamos la presión en el estado 2:

$$e) \quad P_2 = \frac{mRT_2}{V_2} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (681 \text{ K})}{(2 \text{ m}^3)} = 293.17 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 293.17 \text{ kPa}$$

La variación en la energía interna para el proceso (1→2) es:

$$f) \Delta U_{1 \rightarrow 2} = mC_v (T_2 - T_1) = (3 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (681 - 581) \text{ K} = 216 \text{ kJ}$$

y de la ecuación de 1ª Ley: $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, resulta que:

$$g) Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 216 \text{ kJ}$$

Finalmente, para este proceso la variación en la entropía del sistema la calculamos mediante la ecuación:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = mC_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + mR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = mC_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right); \text{ esto es,}$$

$$h) \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (3 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{681}{581} \right) = 0.34 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 2.

El sistema pasa del estado 3 al estado 1 mediante un proceso isobárico, así que:

$$a) P_3 = P_1 = 250 \text{ kPa}$$

Sabemos que el sistema pasa del estado 2 al 3 en forma isoentrópica, lo cual equivale a:

$$b) Q_{2 \rightarrow 3} = 0 \quad \text{y} \quad c) \Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0$$

Como el sistema realiza un ciclo, entonces: $d) \Delta U_{\text{neto}} = 0$, $e) \Delta S_{\text{neto}} = 0$

Paso 3.

Determinamos el valor del calor específico a presión constante: $C_p = C_v + R = 1.007 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

$$\text{Usando el resultado del inciso (2c): } \Delta S_{2 \rightarrow 3} = mC_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) - mR \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = 0;$$

$$\text{por lo que: } mC_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) = mR \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right); \text{ esto es: } \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) = \left(\frac{R}{C_p} \right) \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{(R/C_p)},$$

de donde: a) $T_3 = T_2 \left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{(R/C_p)} = (681 \text{ K}) \left(\frac{250}{293.17} \right)^{(0.287/1.007)} = 650.77 \text{ K}$

y de la ecuación de estado de gas ideal calculamos:

$$b) \quad V_3 = \frac{mRT_3}{P_3} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (650.77 \text{ K})}{\left(250 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 2.24 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 2.24 \text{ m}^3$$

La variación en la energía interna durante el proceso (2→3) es:

$$c) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = mC_v (T_3 - T_2) = (3 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (650.77 - 681) \text{ K} = -65.29 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$ a este proceso isoentrópico:

$$d) \quad W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(-65.29 \text{ kJ}) = 65.29 \text{ kJ}$$

Paso 4.

Dado que $\Delta U_{\text{neto}} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0$, entonces:

$$a) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{\text{neto}} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (216 - 65.29) \text{ kJ} = -150.71 \text{ kJ}$$

De la definición de trabajo para el proceso isobárico (3→1):

$$W_{3 \rightarrow 1} = \int_3^1 P dV = \int_3^1 mR dT = mR \Delta T; \text{ se tiene que}$$

$$b) \quad W_{3 \rightarrow 1} = mR (T_1 - T_3) = (3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (581 - 650.77) \text{ K} = -60.07 \text{ kJ}$$

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$, se tiene que:

$$c) \quad Q_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{3 \rightarrow 1} + W_{3 \rightarrow 1} = (-150.71 - 60.07) \text{ kJ} = -210.78 \text{ kJ}$$

y la variación en la entropía del sistema será:

$$\Delta S_{3 \rightarrow 1} = m C_p \ln \left(\frac{T_1}{T_3} \right) - m R \ln \left(\frac{P_1}{P_3} \right) = m C_p \ln \left(\frac{T_1}{T_3} \right)$$

$$d) \Delta S_{3 \rightarrow 1} = (3 \text{ kg}) \left(1.007 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{581}{650.77} \right) = -0.34 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Finalmente, calculamos el trabajo neto, que es igual al calor neto mediante la suma de los trabajos (calores) en cada proceso:

$$W_{\text{neto}} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 1} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = Q_{\text{neto}}$$

$$e) W_{\text{neto}} = (0 + 65.29 - 60.07) \text{ kJ} = 5.22 \text{ kJ} = Q_{\text{neto}}$$

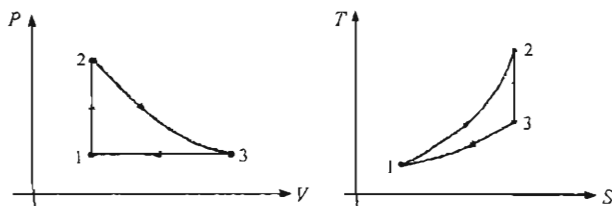
Paso 5.

El rendimiento r del ciclo se obtiene como:

$$a) r = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_2} = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{1 \rightarrow 2}} = \frac{5.22 \text{ kJ}}{216 \text{ kJ}} = 0.0242 = 2.42\%$$

El rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas es:

$$b) r_C = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{581 \text{ K}}{681 \text{ K}} = 0.1468 = 14.68\%$$

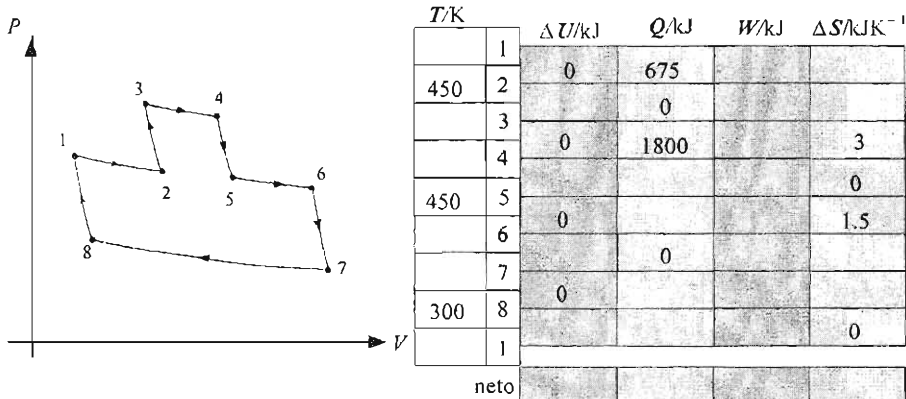


	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1	250	1a 2	581	1f 216	1g 216	1c 0	1h 0.34
2	1e 293.17	1b 2	1d 681	3c -65.29	2b 0	3d 65.29	2c 0
3	2a 250	3b 2.24	3a 650.77	4a -150.71	4c -210.78	4h -60.07	4d -0.34
1	250	1a 2	581				
neto				2d 0	4e 5.22	4e 5.22	2e 0

Problema 2.

3 kg de aire experimentan el ciclo mostrado en el plano P - V .

a) Esbozar el diagrama del ciclo en el plano ST ; calcular: b) las cantidades pedidas en la tabla, c) el rendimiento r del ciclo y d) el rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas.



Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 0.287 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 0.72 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

El diagrama ST ilustrado, nos permite inferir directamente el nombre del proceso, comparar el valor de: la temperatura, la energía interna y la entropía en cada estado por los que pasa el sistema; también se infiere directamente el signo: de la variación en la energía interna así como el del calor intercambiado entre el sistema y los alrededores; todo esto se detalla a continuación:

Paso 1.

Los procesos: $(1 \rightarrow 2)$, $(3 \rightarrow 4)$, $(5 \rightarrow 6)$ y $(7 \rightarrow 8)$ son isotérmicos dado que $\Delta U_{i \rightarrow f} = 0$ como muestra la tabla de valores para estos procesos; de aquí que:

a) $T_1 = T_2 = 450 \text{ K}$, b) $T_3 = T_4$, c) $T_5 = T_6 = 450 \text{ K}$, d) $T_7 = T_8 = 300 \text{ K}$

Paso 2.

Los procesos: $(2 \rightarrow 3)$, $(4 \rightarrow 5)$, $(6 \rightarrow 7)$ y $(8 \rightarrow 1)$ son isentrópicos puesto que, como muestra la tabla de valores, para estos procesos se tienen datos de $Q_{i \rightarrow f} = 0$ ó $\Delta S_{i \rightarrow f} = 0$, por lo tanto:

a) $\Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0$, b) $Q_{4 \rightarrow 5} = 0$, c) $\Delta S_{6 \rightarrow 7} = 0$, d) $Q_{8 \rightarrow 1} = 0$

Paso 3.

Un ciclo se caracteriza por: a) $\Delta U_{\text{neto}} = 0$, b) $\Delta S_{\text{neto}} = 0$

Paso 4.

Aplicando la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$ al proceso isotérmico (1→2):

$$a) \quad W_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} = 675 \text{ kJ}$$

y de la definición de calor $Q_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 T dS = T_1 \int_1^2 dS = T_1 \Delta S_{1 \rightarrow 2}$, resulta que:

$$b) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{T_1} = \frac{675 \text{ kJ}}{450 \text{ K}} = 1.5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

De la definición de calor aplicada al proceso isotérmico (3→4):

$$Q_{3 \rightarrow 4} = \int_3^4 T dS = T_3 \int_3^4 dS = T_3 \Delta S_{3 \rightarrow 4}, \text{ resulta que:}$$

$$c) \quad T_3 = \frac{Q_{3 \rightarrow 4}}{\Delta S_{3 \rightarrow 4}} = \frac{1800 \text{ kJ}}{3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 600 \text{ K} = T_4$$

De la aplicación de la 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4} = 0$ a este proceso isotérmico resulta,

$$d) \quad W_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} = 1800 \text{ kJ}$$

Aplicando la definición de calor al proceso isotérmico (5→6):

$$Q_{5 \rightarrow 6} = \int_5^6 T dS = T_5 \int_5^6 dS = T_5 \Delta S_{5 \rightarrow 6}, \text{ resulta que,}$$

$$e) \quad Q_{5 \rightarrow 6} = T_5 \Delta S_{5 \rightarrow 6} = (450 \text{ K}) \left(1.5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = 675 \text{ kJ}$$

de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{5 \rightarrow 6} = Q_{5 \rightarrow 6} - W_{5 \rightarrow 6} = 0$ aplicada al proceso isotérmico (5→6) resulta que:

$$f) \quad W_{5 \rightarrow 6} = Q_{5 \rightarrow 6} = 675 \text{ kJ}$$

$$\text{Dado que } \Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 5} + \Delta S_{5 \rightarrow 6} + \Delta S_{6 \rightarrow 7} + \Delta S_{7 \rightarrow 8} + \Delta S_{8 \rightarrow 1} = 0;$$

$$\text{entonces, } \Delta S_{7 \rightarrow 8} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 5} + \Delta S_{5 \rightarrow 6} + \Delta S_{6 \rightarrow 7} + \Delta S_{8 \rightarrow 1})$$

$$g) \quad \Delta S_{7 \rightarrow 8} = 0 - (1.5 + 0 + 3 + 0 + 1.5 + 0 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -6 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Finalmente, aplicando la definición de calor para el proceso isotérmico (7→8):

$$Q_{7 \rightarrow 8} = \int_7^8 T dS = T_7 \int_7^8 dS = T_7 \Delta S_{7 \rightarrow 8}, \text{ se tiene que}$$

$$h) \quad Q_{7 \rightarrow 8} = T_7 \Delta S_{7 \rightarrow 8} = (300 \text{ K}) \left(-6 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -1800 \text{ kJ}$$

y de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{7 \rightarrow 8} = Q_{7 \rightarrow 8} - W_{7 \rightarrow 8} = 0$, se obtiene

$$i) \quad W_{7 \rightarrow 8} = Q_{7 \rightarrow 8} = -1800 \text{ kJ}$$

Paso 5.

Como en el ciclo $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, entonces: $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}}$; y

$$Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 5} + Q_{5 \rightarrow 6} + Q_{6 \rightarrow 7} + Q_{7 \rightarrow 8} + Q_{8 \rightarrow 1} = W_{\text{neto}}; \text{ esto es que}$$

$$a) \quad Q_{\text{neto}} = (675 + 0 + 1800 + 0 + 675 + 0 - 1800 + 0) \text{ kJ} = 1350 \text{ kJ} = W_{\text{neto}}$$

Paso 6.

Como se conoce la temperatura en cada uno de los estados termodinámicos usando la relación $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f}$, calculamos la variación en la energía interna para los procesos isoentrópicos:

$$a) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = m C_V (T_3 - T_2) = (3 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 - 450) \text{ K} = 324 \text{ kJ}$$

$$b) \quad \Delta U_{4 \rightarrow 5} = m C_V (T_5 - T_4) = (3 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (450 - 600) \text{ K} = -324 \text{ kJ}$$

$$c) \quad \Delta U_{6 \rightarrow 7} = m C_V (T_7 - T_6) = (3 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 - 450) \text{ K} = -324 \text{ kJ}$$

$$d) \quad \Delta U_{8 \rightarrow 1} = m C_V (T_1 - T_8) = (3 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (450 - 300) \text{ K} = 324 \text{ kJ}$$

Aplicando la Primera Ley $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = -W_{i \rightarrow f}$, para estos cuatro procesos isotrópicos se tiene que:

$$e) \quad W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(324 \text{ kJ}) = -324 \text{ kJ}$$

$$f) \quad W_{4 \rightarrow 5} = -\Delta U_{4 \rightarrow 5} = -(-324 \text{ kJ}) = 324 \text{ kJ}$$

$$g) \quad W_{6 \rightarrow 7} = -\Delta U_{6 \rightarrow 7} = -(-324 \text{ kJ}) = 324 \text{ kJ}$$

$$h) \quad W_{8 \rightarrow 1} = -\Delta U_{8 \rightarrow 1} = -(324 \text{ kJ}) = -324 \text{ kJ}$$

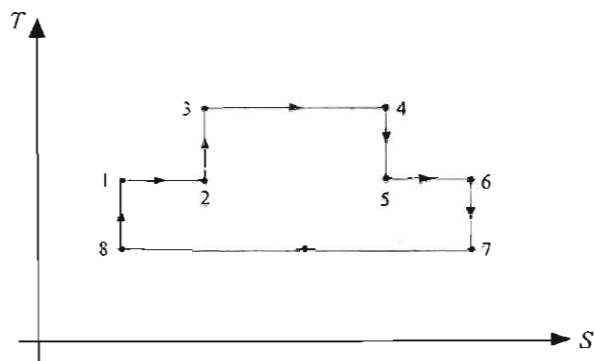
Paso 7.

El rendimiento r del ciclo se obtiene como:

$$a) \quad r = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_o} = \frac{W_{\text{neto}}}{(Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{5 \rightarrow 6})} = \frac{1350 \text{ kJ}}{(675 + 1800 + 675) \text{ kJ}} = 0.4286 = 42.86\%$$

El rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas es:

$$b) \quad r_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_8}{T_4} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{600 \text{ K}} = 0.50 = 50\%$$



T/K		$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJ K}^{-1}$
$1a$ 450	1	0	675	$4a$ 675	$4b$ 1.5
	450 2	$6a$ 324	0	$6e$ -324	$2a$ 0
$4c$ 600	3	0	1800	$4d$ 1800	3
$4c$ 600	4	$6b$ -324	0	$6f$ 324	0
450 5		0	$4e$ 675	$4f$ 675	1.5
$1c$ 450	6	$6c$ -324	0	$6g$ 324	$2c$ 0
$1d$ 300	7	0	$4h$ -1800	$4i$ -1800	$4g$ -6
300 8		$6d$ 324	$2d$ 0	$6h$ -324	0
$1a$ 450	1				
neto		$3a$ 0	$5a$ 1350	$5a$ 1350	$3b$ 0

Problema 1.

3 kg de oxígeno inicialmente a 600 K y 6 m³ experimentan los siguientes cambios: en forma isobárica disminuye su temperatura en 200 K; regresan al estado inicial después de un cambio isocórico seguido de uno isotérmico.

a) Llenar la tabla, b) esbozar el diagrama del ciclo en los planos VP y ST ; calcular: c) el rendimiento r del ciclo d) el rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas.

	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1							
2							
3							
1							
neto							

Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 0.259 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 0.662 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Se conocen el volumen y la temperatura en el estado inicial por lo que mediante la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos su presión:

$$a) \quad P_1 = \frac{mRT_1}{V_1} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.259 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 \text{ K})}{(6 \text{ m}^3)} = 77.7 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 77.7 \text{ kPa}$$

El proceso (1→2) es un proceso isobárico en el que la temperatura disminuye en 200 K, esto significa que:

$$b) \quad P_2 = P_1 = 77.7 \text{ kPa}, \quad c) \quad \Delta T_{1 \rightarrow 2} = -200 \text{ K} = T_2 - T_1; \text{ de donde:}$$

$$d) \quad T_2 = T_1 + \Delta T_{1 \rightarrow 2} = (600 - 200) \text{ K} = 400 \text{ K}$$

A través de la ecuación de estado calculamos el volumen en el estado 2:

$$e) \quad V_2 = \frac{mRT_2}{P_2} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.259 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (400 \text{ K})}{\left(77.7 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 4 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 4 \text{ m}^3$$

Paso 2.

Calculamos la variación en la energía interna para el proceso (1→2):

$$a) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = m C_v (T_2 - T_1) = (3 \text{ kg}) \left(0.662 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (400 - 600) \text{ K} = -397.2 \text{ kJ}$$

De la definición de trabajo: $W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 P dV = \int_1^2 m R dT = m R \Delta T$

$$b) \quad W_{1 \rightarrow 2} = m R (T_2 - T_1) = (3 \text{ kg}) \left(0.259 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (400 - 600) \text{ K} = -155.4 \text{ kJ}$$

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, se tiene que:

$$c) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + W_{1 \rightarrow 2} = (-397.2 - 155.4) \text{ kJ} = -552.6 \text{ kJ}$$

El calor específico a presión constante está dado como: $C_p = C_v + R = 0.921 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

Para el proceso isobárico (1→2), la variación en la entropía del sistema se determina a través de la ecuación:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = m C_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + m R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = m C_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right),$$

$$d) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (3 \text{ kg}) \left(0.921 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{400}{600} \right) = -1.12 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 3.

El sistema pasa del estado 2 al 3 mediante un proceso isocórico; lo cual significa que:

$$a) \quad V_3 = V_2 = 4 \text{ m}^3, \quad b) \quad W_{2 \rightarrow 3} = 0$$

Se sabe también que el sistema pasa del estado 3 al 1 en forma isotérmica, por lo tanto:

$$c) \quad T_3 = T_1 = 600 \text{ K}, \quad d) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0$$

De la ecuación de procesos politrópicos $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, con $\kappa_{3 \rightarrow 1} = 1$, esto es $P_3 V_3 = P_1 V_1$; calculamos:

$$e) \quad P_3 = \frac{P_1 V_1}{V_3} = \frac{(77.7 \text{ kPa})(6 \text{ m}^3)}{(4 \text{ m}^3)} = 116.55 \text{ kPa}$$

Paso 4.

Como el sistema realiza un ciclo, entonces: a) $\Delta U_{neto} = 0$ y b) $\Delta S_{neto} = 0$

Dado que $\Delta U_{neto} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0$, entonces:

$$c) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{neto} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{3 \rightarrow 1}) = 0 - (-397.2 + 0) \text{ kJ} = 397.2 \text{ kJ}$$

Para el proceso isocórico (2→3), la variación en la entropía la determinamos mediante la ecuación:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = mC_v \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + mR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = mC_v \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right), \text{ esto es}$$

$$d) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = (3 \text{ kg}) \left(0.662 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln\left(\frac{600}{400}\right) = 0.80 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como $\Delta S_{neto} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 1} = 0$, entonces:

$$e) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 1} = \Delta S_{neto} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (-1.12 + 0.80) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.32 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 5.

De la aplicación de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$ al proceso isocórico (2→3), resulta que:

$$a) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} = 397.2 \text{ kJ}$$

Para el proceso isotérmico (3→1), el calor y el trabajo son iguales y de la definición de calor:

$$b) \quad Q_{3 \rightarrow 1} = \int_3^1 T dS = T_3 \Delta S_{3 \rightarrow 1} = (600 \text{ K}) \left(0.32 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = 192 \text{ kJ} = W_{3 \rightarrow 1}$$

Finalmente, calculamos el calor neto, que es igual al trabajo neto mediante la suma de los calores (trabajos) en cada proceso

$$Q_{neto} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 1} = W_{neto}$$

$$c) \quad Q_{neto} = (-552.6 + 397.2 + 192) \text{ kJ} = 36.6 \text{ kJ} = W_{neto}$$

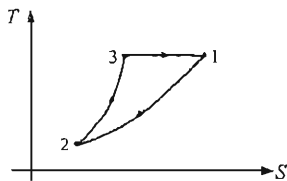
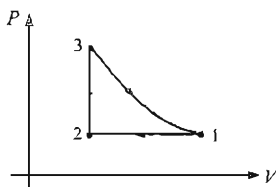
Paso 6.

El rendimiento r del ciclo se obtiene como:

$$a) \quad r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{(Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1})} = 1 - \frac{552.6 \text{ kJ}}{(397.2 + 192) \text{ kJ}} = 0.0621 = 6.21\%$$

El rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas es:

$$b) \quad r = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \frac{400 \text{ K}}{600 \text{ K}} = 0.3333 = 33.33\%$$

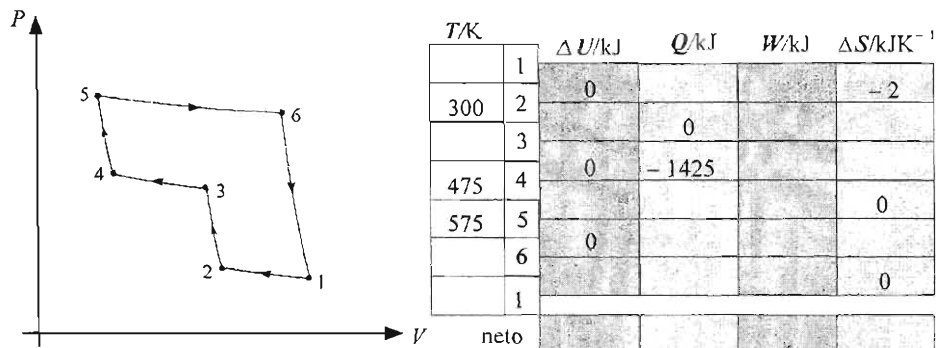


	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJ K}^{-1}$
1	$1a$ 77.7	6	600	$2a$ -397.2	$2c$ -552.6	$2b$ -155.4	$2d$ -1.12
2	$1b$ 77.7	$1e$ 4	$1d$ 400	$4c$ 397.2	$5a$ 397.2	$3b$ 0	$4d$ 0.80
3	$3e$ 116.55	$3a$ 4	$3c$ 600	$3d$ 0	$5b$ 192	$5b$ 192	$4e$ 0.32
1	$1a$ 77.7	6	600				
neto				$4a$ 0	$5c$ 36.6	$5c$ 36.6	$4b$ 0

Problema 2.

3 kg de oxígeno experimentan el ciclo mostrado en el plano VP .

a) Esbozar el diagrama del ciclo en el plano ST ; calcular: b) las cantidades pedidas en la tabla, c) el rendimiento r del ciclo y d) el rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas.



Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 0.259 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 0.662 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

El diagrama ST ilustrado, nos permite inferir directamente el nombre del proceso, comparar el valor de: la temperatura, la energía interna y la entropía en cada estado por los que pasa el sistema; también se infiere directamente el signo: de la variación en la energía interna así como el del calor intercambiado entre el sistema y los alrededores; todo esto se detalla a continuación:

Paso 1.

Los procesos: $(1 \rightarrow 2)$, $(3 \rightarrow 4)$ y $(5 \rightarrow 6)$ son procesos isotérmicos dado que, como muestra la tabla de valores, para estos procesos el cambio en la energía interna es igual a cero, de aquí que:

a) $T_1 = T_2 = 300 \text{ K}$, b) $T_3 = T_4 = 475 \text{ K}$, c) $T_5 = T_6 = 575 \text{ K}$

Paso 2.

Los procesos: $(2 \rightarrow 3)$, $(4 \rightarrow 5)$ y $(6 \rightarrow 1)$ son isoentrópicos dado que, como muestra la tabla de valores, para estos procesos se tienen datos de calor o del cambio en entropía y son iguales a cero, por lo tanto:

a) $\Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0$, b) $Q_{4 \rightarrow 5} = 0$, c) $Q_{6 \rightarrow 1} = 0$

Paso 3.

Un ciclo se caracteriza por: a) $\Delta U_{\text{neto}} = 0$, b) $\Delta S_{\text{neto}} = 0$

Paso 4.

De la definición de calor para el proceso isotérmico (1→2):

$$Q_{1\rightarrow 2} = \int_1^2 T dS = T_1 \int_1^2 dS = T_1 \Delta S_{1\rightarrow 2}, \text{ resulta que:}$$

$$a) \quad Q_{1\rightarrow 2} = T_1 \Delta S_{1\rightarrow 2} = (300 \text{ K}) \left(-2 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -600 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso $\Delta U_{1\rightarrow 2} = Q_{1\rightarrow 2} - W_{1\rightarrow 2} = 0$, se tiene que

$$b) \quad W_{1\rightarrow 2} = Q_{1\rightarrow 2} = -600 \text{ kJ}$$

De la aplicación de la ecuación de 1ª Ley al proceso isotérmico (3→4),

$$\Delta U_{3\rightarrow 4} = Q_{3\rightarrow 4} - W_{3\rightarrow 4} = 0, \text{ resulta que:}$$

$$c) \quad W_{3\rightarrow 4} = Q_{3\rightarrow 4} = -1425 \text{ kJ}$$

y de la definición de calor aplicada al mismo proceso:

$$Q_{3\rightarrow 4} = \int_3^4 T dS = T_3 \int_3^4 dS = T_3 \Delta S_{3\rightarrow 4}, \text{ se obtiene}$$

$$d) \quad \Delta S_{3\rightarrow 4} = \frac{Q_{3\rightarrow 4}}{T_3} = \frac{-1425 \text{ kJ}}{475 \text{ K}} = -3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que en el ciclo $\Delta S_{\text{neto}} = 0$ y además

$$\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1\rightarrow 2} + \Delta S_{2\rightarrow 3} + \Delta S_{3\rightarrow 4} + \Delta S_{4\rightarrow 5} + \Delta S_{5\rightarrow 6} + \Delta S_{6\rightarrow 1} = 0, \text{ resulta que:}$$

$$\Delta S_{5\rightarrow 6} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1\rightarrow 2} + \Delta S_{2\rightarrow 3} + \Delta S_{3\rightarrow 4} + \Delta S_{4\rightarrow 5} + \Delta S_{6\rightarrow 1})$$

$$e) \quad \Delta S_{5\rightarrow 6} = 0 - (-2 + 0 - 3 + 0 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Finalmente, para el proceso isotérmico (5→6) se tiene de la definición de calor:

$$Q_{5 \rightarrow 6} = \int_5^6 T dS = T_5 \int_5^6 dS = T_5 \Delta S_{5 \rightarrow 6}, \text{ que,}$$

$$f) \quad Q_{5 \rightarrow 6} = T_5 \Delta S_{5 \rightarrow 6} = (575 \text{ K}) \left(5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = 2875 \text{ kJ}$$

y de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{5 \rightarrow 6} = Q_{5 \rightarrow 6} - W_{5 \rightarrow 6} = 0$, resulta que

$$g) \quad W_{5 \rightarrow 6} = Q_{5 \rightarrow 6} = 2875 \text{ kJ}$$

Paso 5.

Como en el ciclo $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, entonces, $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}}$; y

$$Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 5} + Q_{5 \rightarrow 6} + Q_{6 \rightarrow 1} = W_{\text{neto}}; \text{ esto es}$$

$$a) \quad Q_{\text{neto}} = (-600 + 0 - 1425 + 0 + 2875 + 0) \text{ kJ} = 850 \text{ kJ} = W_{\text{neto}}$$

Paso 6.

Como se conoce la temperatura en cada uno de los estados termodinámicos, usando la relación $\Delta U_{i \rightarrow f} = m C_V (T_f - T_i)$, calculamos la variación en la energía interna para los procesos isentrópicos:

$$a) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = m C_V (T_3 - T_2) = (3 \text{ kg}) \left(0.662 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (475 - 300) \text{ K} = 347.55 \text{ kJ}$$

$$b) \quad \Delta U_{4 \rightarrow 5} = m C_V (T_5 - T_4) = (3 \text{ kg}) \left(0.662 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (575 - 475) \text{ K} = 198.6 \text{ kJ}$$

$$c) \quad \Delta U_{6 \rightarrow 1} = m C_V (T_1 - T_6) = (3 \text{ kg}) \left(0.662 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 - 575) \text{ K} = -546.15 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley para estos tres procesos isentrópicos,

$\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f}$, resulta que, $W_{i \rightarrow f} = -\Delta U_{i \rightarrow f}$; por lo tanto:

$$d) W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(347.55 \text{ kJ}) = -347.55 \text{ kJ}$$

$$e) W_{4 \rightarrow 5} = -\Delta U_{4 \rightarrow 5} = -(198.6 \text{ kJ}) = -198.6 \text{ kJ}$$

$$f) W_{6 \rightarrow 1} = -\Delta U_{6 \rightarrow 1} = -(-546.15 \text{ kJ}) = 546.15 \text{ kJ}$$

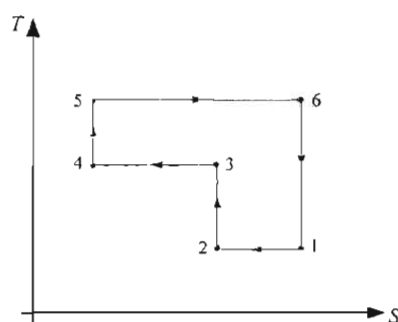
Paso 7.

El rendimiento r del ciclo se obtiene como:

$$a) r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{(Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{3 \rightarrow 4})}{(Q_{3 \rightarrow 6})} = 1 - \frac{(600 + 1425) \text{ kJ}}{(2875) \text{ kJ}} = 0.2956 = 29.56\%$$

El rendimiento r_c de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas es:

$$b) r_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_2}{T_6} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{575 \text{ K}} = 0.4783 = 47.83\%$$



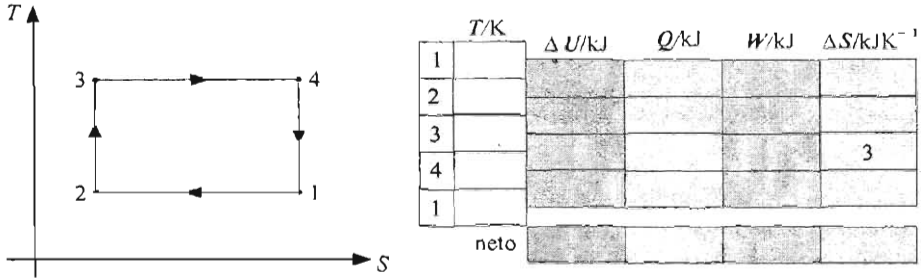
T/K		$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1a	300	1			
	300	2			
1b	475	3			
	475	4			
	575	5			
1c	575	6			
1a	300	1			
neto					
3a	0	5a	850	5a	850
3b	0				

(84 - P)

Problema 1.

3 kg de helio efectúan el ciclo de Carnot ilustrado en el plano ST , operando entre las temperaturas de 600 K y 360 K .

a) Llenar la tabla, b) calcular el rendimiento r_c del ciclo.



Datos: $m = 3\text{ kg}$, $R = 2.08\text{ kJ/kgK}$, $C_p = 5.20\text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Para los procesos isotérmicos ($1 \rightarrow 2$) y ($3 \rightarrow 4$) se tiene que:

$$a) \quad T_1 = T_2 = T_{\min} = 360\text{ K} \quad , \quad b) \quad T_3 = T_4 = T_{\max} = 600\text{ K} \quad , \quad c) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0 = \Delta U_{3 \rightarrow 4}$$

Los procesos isoentrópicos ($2 \rightarrow 3$) y ($4 \rightarrow 1$) están caracterizados por:

$$d) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = 0 = Q_{4 \rightarrow 1} \quad , \quad e) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0 = \Delta S_{4 \rightarrow 1}$$

Debido a que en un ciclo la variación total en cualquier variable termodinámica es igual a cero, entonces

$$f) \quad \Delta U_{\text{neto}} = 0 \quad \text{y} \quad g) \quad \Delta S_{\text{neto}} = 0$$

Dado que $\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1} = 0$, resulta que

$$h) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1}) = 0 - (0 + 3 + 0) = -3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 2.

Aplicando la definición de calor $Q_{i \rightarrow f} = \int_i^f T dS = T \int_i^f dS = T_i \Delta S_{i \rightarrow f}$ a los procesos isotérmicos (1→2) y (3→4) se tiene

$$a) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = T_1 \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (360 \text{ K}) \left(-3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -1080 \text{ kJ}$$

$$b) \quad Q_{3 \rightarrow 4} = T_3 \Delta S_{3 \rightarrow 4} = (600 \text{ K}) \left(3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = 1800 \text{ kJ}$$

y de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = 0$ resulta que el calor y el trabajo intercambiados por el sistema y los alrededores en estos procesos son iguales, por lo tanto:

$$c) \quad W_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} = -1080 \text{ kJ}, \quad d) \quad W_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} = 1800 \text{ kJ}$$

Dado que $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, entonces $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}}$, en donde:

$$Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1} = 0 = W_{\text{neto}}, \text{ esto es que:}$$

$$e) \quad Q_{\text{neto}} = (-1080 + 0 + 1800 + 0) \text{ kJ} = 720 \text{ kJ} = W_{\text{neto}}$$

Paso 3.

$$\text{Como } C_p = C_v + R; \text{ entonces: } C_v = C_p - R = 3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

La variación en la energía interna del sistema durante los procesos isoentrópicos (2→3) y (4→1) es igual a:

$$a) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = m C_v (T_3 - T_2) = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 - 360) \text{ K} = 2246.4 \text{ kJ}$$

$$b) \quad \Delta U_{4 \rightarrow 1} = m C_v (T_1 - T_4) = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (360 - 600) \text{ K} = -2246.4 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de la Primera Ley a estos procesos isoentrópicos $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = -W_{i \rightarrow f}$ resulta que,

$$c) \quad W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(2246.4) \text{ kJ} = -2246.4 \text{ kJ} , \text{ y}$$

$$d) \quad W_{4 \rightarrow 1} = -\Delta U_{4 \rightarrow 1} = -(-2246.4) \text{ kJ} = 2246.4 \text{ kJ}$$

El rendimiento r_C de este ciclo de Carnot es:

$$e) \quad r_C = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \frac{360 \text{ K}}{600 \text{ K}} = 0.40 = 40\%$$

	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1	$1a$ 360	$1c$ 0	$2a$ 1080	$2c$ 1080	$1h$ 3
2	$1a$ 360	$3a$ 2246.4	$1d$ 0	$3c$ -2246.4	$1e$ 0
3	$1b$ 600	$1c$ 0	$2b$ 1800	$2d$ 1800	3
4	$1b$ 600	$3b$ -2246.4	$1d$ 0	$3d$ 2246.4	$1e$ 0
1	$1a$ 360				
neto		$1f$ 0	$2e$ 720	$2e$ 720	$1g$ 0

Problema 2.

3 kg de helio se ven sujetos a los cambios siguientes: mediante un cambio isotérmico su presión aumenta a 468 kPa; a continuación se expande en forma isobárica; regresa al estado inicial mediante un cambio isocórico.

- a) Llenar la tabla, b) esbozar el diagrama del ciclo en los planos VP y ST ; calcular: c) el rendimiento r del ciclo y d) el rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas.

	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJ/K}$
1		8	300				
2							
3							
1							
neto							

Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$, $C_p = 5.20 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Con los datos del volumen y la temperatura en el estado inicial, mediante la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos la presión:

$$a) \quad P_1 = \frac{mRT_1}{V_1} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 \text{ K})}{(8 \text{ m}^3)} = 234 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 234 \text{ kPa}$$

El proceso (1→2) es un proceso isotérmico en el que la presión del sistema aumenta a 468 kPa, esto significa que:

$$b) \quad T_2 = T_1 = 300 \text{ K}, \quad c) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0, \quad d) \quad P_2 = 468 \text{ kPa}$$

Aplicando la ecuación de procesos politrópicos $P_f V_f^\kappa = P_i V_i^\kappa$, con $\kappa_{1 \rightarrow 2} = 1$, esto es:

$$P_2 V_2 = P_1 V_1; \text{ calculamos:}$$

$$e) \quad V_2 = \frac{P_1 V_1}{P_2} = \frac{(234 \text{ kPa})(8 \text{ m}^3)}{(468 \text{ kPa})} = 4 \text{ m}^3$$

Paso 2.

El proceso (2→3) es isobárico, entonces: a) $P_3 = P_2 = 468 \text{ kPa}$

Como el sistema pasa del estado 3 al 1 mediante un proceso isocórico, entonces:

$$b) \quad V_3 = V_1 = 8 \text{ m}^3, \quad c) \quad W_{3 \rightarrow 1} = 0$$

Mediante la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos la temperatura en el estado 3:

$$d) \quad T_3 = \frac{P_3 V_3}{mR} = \frac{\left(468 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right)(8 \text{ m}^3)}{(3 \text{ kg})\left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)} = 600 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 600 \text{ K}$$

Paso 3.

$$\text{Dado que } C_p = C_v + R; \text{ entonces: } C_v = C_p - R = 3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

Para el proceso isotérmico (1→2) calculamos la variación en la entropía del sistema mediante la ecuación:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = mC_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + mR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = mR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right), \text{ esto es:}$$

$$a) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (3 \text{ kg})\left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right) \ln\left(\frac{4}{8}\right) = -4.32 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

De la definición de calor

$$b) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 T dS = T_1 \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (300 \text{ K})\left(-4.32 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}\right) = -1296 \text{ kJ}$$

Usando la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = 0$, resulta que:

$$c) \quad W_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} = -1296 \text{ kJ}$$

Paso 4.

Para el proceso isobárico (2→3) calculamos:

La variación en la energía interna:

$$a) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = mC_v (T_3 - T_2) = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 - 300) \text{ K} = 2808 \text{ kJ}$$

De la definición de trabajo $W_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 P dV = \int_2^3 mRdT = mR\Delta T$; se tiene que

$$b) \quad W_{2 \rightarrow 3} = mR\Delta T_{2 \rightarrow 3} = (3 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 - 300) \text{ K} = 1872 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, se tiene que:

$$c) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} + W_{2 \rightarrow 3} = (2808 + 1872) \text{ kJ} = 4680 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del sistema:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = mC_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) - mR \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = mC_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right); \text{ por lo que:}$$

$$d) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = (3 \text{ kg}) \left(5.20 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{600}{300} \right) = 10.81 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 5.

Como el sistema realiza un ciclo: a) $\Delta U_{\text{neto}} = 0$, b) $\Delta S_{\text{neto}} = 0$

Dado que $\Delta U_{\text{neto}} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0$, entonces:

$$c) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{\text{neto}} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (0 + 2808) \text{ kJ} = -2808 \text{ kJ}$$

De la ecuación de 1ª Ley aplicada al proceso isocórico (3→1): $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$, resulta que:

$$d) \quad Q_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{3 \rightarrow 1} = -2808 \text{ kJ}$$

Ahora bien, dado que $\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 1} = 0$, entonces,

$$e) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 1} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (-4.32 + 10.81) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -6.49 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Finalmente, calculamos el calor neto, que es igual al trabajo neto mediante la suma de los calores (trabajos) en cada proceso:

$$Q_{neto} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 1} = W_{neto}$$

$$f) \quad Q_{neto} = (-1296 + 4680 - 2808) \text{ kJ} = 576 \text{ kJ} = W_{neto}$$

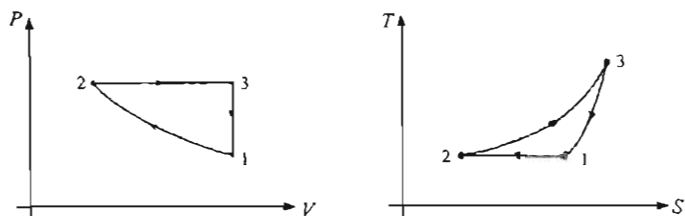
Paso 6.

El rendimiento r del ciclo se obtiene como:

$$a) \quad r = \frac{W_{neto}}{Q_a} = \frac{W_{neto}}{Q_{2 \rightarrow 3}} = \frac{576 \text{ kJ}}{4680 \text{ kJ}} = 0.1231 = 12.31\%$$

El rendimiento r_C de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas es:

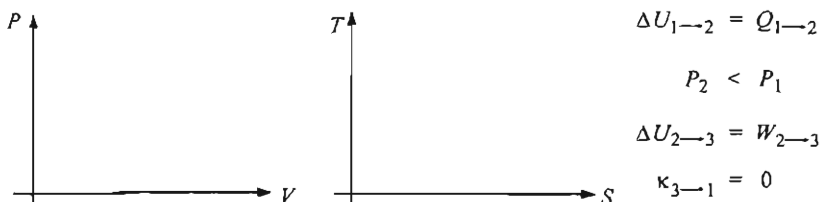
$$b) \quad r_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{600 \text{ K}} = 0.50 = 50\%$$



	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJ/K}^{-1}$
1	1a 234	8	300	1c 0	3b -1296	3c 1296	3a -4.32
2	1d 468	4	300	4a 2808	4c 4680	4b 1872	4d 10.81
3	2a 468	8	600	5c -2808	5d -2808	2c 0	5e -6.49
1	1a 234	8	300	5a 0	5f 576	5f 576	5b 0
neto							

Problema 3.

Esbozar en el plano ST el ciclo formado por tres procesos politrópicos a los que es sometido un gas ideal, tal que se cumplen las relaciones a la derecha del plano.



Solución:

Paso 1.

Dado que $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2}$, entonces de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$ concluimos que:

a) $W_{1 \rightarrow 2} = 0$, es decir que el proceso es isocórico y por lo tanto:

b) $V_2 = V_1$

La representación de este proceso en el plano VP es una recta paralela al eje de la presión y dado que se debe cumplir que $P_2 < P_1$, entonces la temperatura debe disminuir. Al disminuir la temperatura, la entropía disminuye también. Este proceso en el plano ST se representa mediante la curva de pendiente positiva como se indica en el diagrama.

Paso 2.

Nos indican que el proceso $(2 \rightarrow 3)$ se caracteriza porque $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = W_{2 \rightarrow 3}$.

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, resulta que si $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$, entonces $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -W_{2 \rightarrow 3}$ y la única forma en que se satisfaga la condición que nos indican, es que el trabajo en este proceso sea negativo, de esta manera: $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(-W_{2 \rightarrow 3}) = W_{2 \rightarrow 3}$.

Como $W_{2 \rightarrow 3}$ es negativo, entonces el proceso $(2 \rightarrow 3)$ es una compresión isoentrópica, por lo que:

a) $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$, b) $\Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0$, c) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} > 0$,

d) $T_3 > T_2$, e) $V_3 < V_2$

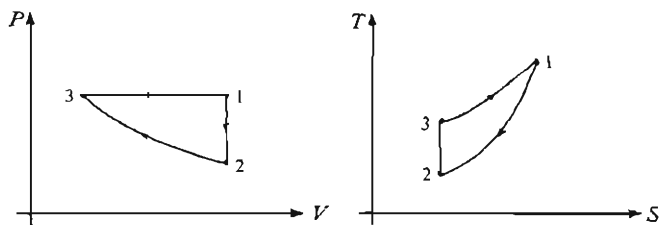
El proceso $(2 \rightarrow 3)$ se representa en el plano ST por una recta paralela al eje de temperatura con el sentido de T creciente; en el plano VP la curva que lo representa es una curva tipo hipérbola en la que al disminuir el volumen, la presión debe aumentar hasta alcanzar el valor de la presión inicial.

Paso 3.

Dado que $\kappa_{3 \rightarrow 1} = 0$, entonces el sistema regresa al estado inicial mediante un proceso isobárico. Para que el sistema retorne nuevamente al estado 1 debe cumplirse que:

a) $V_1 > V_3$, b) $W_{3 \rightarrow 1} > 0$, es decir mediante una expansión isobárica.

El ciclo descrito se ilustra en los planos VP y ST .



Problema 1.

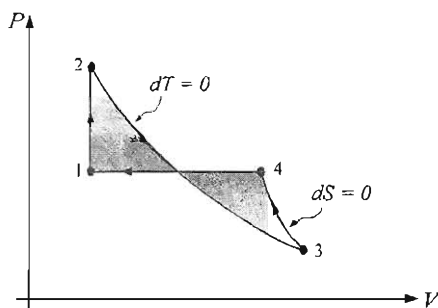
Un gas ideal realiza el ciclo reversible mostrado en el plano VP .

a) Esbozar el diagrama del ciclo en el plano ST ; b) determinar las variaciones totales en la energía interna y entropía del sistema.

Considerando que el área sombreada en la figura es igual a 450 kJ; determinar: c) el trabajo neto, y d) el calor neto.

Sabiendo que el calor absorbido por el sistema es de 1500 kJ; e) calcular el rendimiento r del ciclo.

Finalmente, si $r_C = 45\%$ y $T_4 = 540\text{ K}$; f) calcular la mínima temperatura que alcanza el sistema durante el ciclo.

**Solución:****Paso 1.**

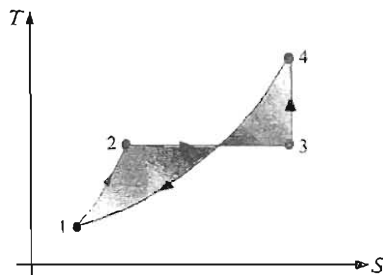
Durante el proceso $(1 \rightarrow 2)$, a volumen constante aumenta la presión del sistema, por lo que la temperatura aumenta también. Este proceso se representa en el plano ST mediante una curva de pendiente positiva en el sentido de S y T crecientes.

El sistema pasa del estado 2 al 3 mediante una expansión isotérmica. Dado que el trabajo y el calor son iguales en este proceso, su representación en el plano ST es a través de una recta paralela al eje S en donde la entropía debe aumentar para que el calor sea positivo.

El proceso $(3 \rightarrow 4)$ es una compresión isoentrópica. La curva representativa en el plano ST es una recta paralela al eje T en la que la temperatura del sistema aumenta.

Finalmente, el sistema regresa al estado inicial por medio de una compresión isobárica. Este proceso es representado en el plano ST mediante una curva, de pendiente positiva, en el sentido de S y T decrecientes.

a)



Paso 2.

En un ciclo la variación neta o total en cualquier variable termodinámica es igual a cero; por lo tanto: b) $\Delta U_{\text{neto}} = 0$ y $\Delta S_{\text{neto}} = 0$

El área sombreada en el ciclo mostrado en el plano VP representa al trabajo neto o total.

c) $W_{\text{neto}} = 450 \text{ kJ}$

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, resulta que $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}}$

d) $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}} = 450 \text{ kJ}$

El rendimiento r del ciclo está dado como:

e) $r = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_c} = \frac{W_{\text{neto}}}{(Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3})} = \frac{450 \text{ kJ}}{1500 \text{ kJ}} = 0.30 = 30\%$

Como puede observarse en el plano ST , la temperatura mínima alcanzada por el sistema en este ciclo corresponde a la del estado 1, en tanto que al estado 4 le corresponde el valor máximo de temperatura: $T_1 = T_{\min}$ y $T_4 = T_{\max}$.

El rendimiento de un ciclo de Carnot operando a las temperaturas extremas que alcanza el sistema en el ciclo original mostrado es igual a:

$r_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_1}{T_4} = 0.45$; esto es que: $\frac{T_1}{T_4} = 1 - r_c$: de donde

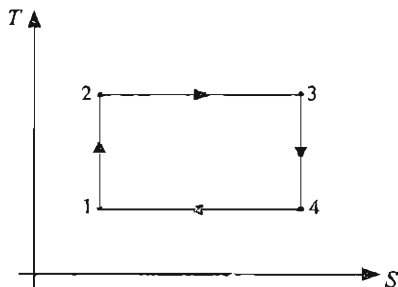
f) $T_1 = T_4(1 - r_c) = (540 \text{ K})(1 - 0.45) = 297 \text{ K}$

Problema 2.

Un sistema que consta de 4 kg de aire inicialmente a 27°C realiza el ciclo reversible ilustrado en el plano ST .

Sabiendo que en la expansión isotérmica el sistema triplica su volumen, determinar: a) la variación de la entropía del sistema debida a la compresión a temperatura constante, b) el calor cedido por el sistema.

Si debido a la compresión isoentrópica la temperatura del sistema aumenta a 327°C , calcular: c) el calor absorbido por el sistema, d) el trabajo neto realizado por el sistema y e) el rendimiento r_C del ciclo.



Datos: $m = 4 \text{ kg}$, $R = 0.287 \text{ kJ/kgK}$, $C_p = 1.007 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

El diagrama ST del ciclo muestra que el sistema intercambia calor con los alrededores durante los procesos $(2 \rightarrow 3)$ y $(4 \rightarrow 1)$ y el signo correspondiente depende de si la entropía aumenta o disminuye; dado que para el proceso $(2 \rightarrow 3)$ la entropía está aumentando, entonces durante este proceso el sistema absorbe calor, es decir que: $Q_{2 \rightarrow 3} > 0$; además, como para este proceso la temperatura es constante, $T_3 = T_2 = T_{\max}$, de la ecuación de la 1ª Ley: $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0 = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, se concluye que: $W_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3}$; esto es que, $W_{2 \rightarrow 3} > 0$. Este último resultado nos permite concluir que el proceso $(2 \rightarrow 3)$ representa a la expansión isotérmica durante la cual el sistema triplica su volumen, por lo que $V_3 = 3V_2$.

La variación en la entropía del sistema debida a este proceso se calcula a partir de la ecuación:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = mC_v \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) + mR \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) = mR \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) = mR \ln \left(\frac{3V_2}{V_2} \right), \text{ esto es:}$$

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = mR \ln(3) = (4 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln(3) = 1.26 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 2.

Del diagrama se observa que durante los procesos (1→2) y (3→4) la variación en la entropía del sistema es igual a cero y dado que en un ciclo $\Delta S_{\text{neto}} = 0$ y además $\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1} = 0$, resulta que

$$\Delta S_{4 \rightarrow 1} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4}) = 0 - (0 + 1.26 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -1.26 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Concluimos que: La variación en la entropía del sistema debida a la compresión a temperatura constante es: a) $\Delta S_{4 \rightarrow 1} = -1.26 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$

Durante el proceso (4→1) en el que la entropía del sistema disminuye, el sistema cede calor a la temperatura mínima: $T_4 = T_1 = T_{\text{mín}} = (27 + 273) \text{ K} = 300 \text{ K}$

Aplicando la definición de calor a este proceso isotérmico:

$$Q_{4 \rightarrow 1} = \int_4^1 T dS = T_4 \Delta S_{4 \rightarrow 1} = (300 \text{ K}) \left(-1.26 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -378 \text{ kJ} ; \text{ por lo tanto:}$$

El calor cedido por el sistema es: b) $Q_c = Q_{4 \rightarrow 1} = -378 \text{ kJ}$

Paso 3.

El proceso (1→2) está caracterizado por: $\Delta U_{1 \rightarrow 2} > 0$, $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$ y $\Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0$. Aplicando la ecuación de 1ª Ley: $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, inferimos que $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2}$.

Para que $\Delta U_{1 \rightarrow 2} > 0$ es necesario que el trabajo de 1 a 2 sea negativo lo cual implica que este proceso representa a la compresión isoentrópica.

Se sabe que en la compresión isoentrópica la temperatura aumenta a 600 K , de aquí que la temperatura máxima de operación del sistema es: $T_{\text{max}} = T_3 = T_2 = 600 \text{ K}$.

A la temperatura máxima el sistema absorbe calor y esto ocurre durante la expansión isotérmica caracterizada por el proceso (2→3). Aplicando la definición de calor a este proceso:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 T dS = T_3 \Delta S_{2 \rightarrow 3} = (600 \text{ K}) \left(1.26 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = 756 \text{ kJ} ; \text{ por lo tanto,}$$

El calor absorbido por el sistema es: c) $Q_a = Q_{2 \rightarrow 3} = 756 \text{ kJ}$

Paso 4.

En un ciclo, $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, por lo que: $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}}$, y

$$Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1} = (0 + 756 + 0 - 378) \text{ kJ} = 378 \text{ kJ} = W_{\text{neto}}, \text{ por lo tanto:}$$

El trabajo neto realizado por el sistema es: d) $Q_{\text{neto}} = 378 \text{ kJ}$

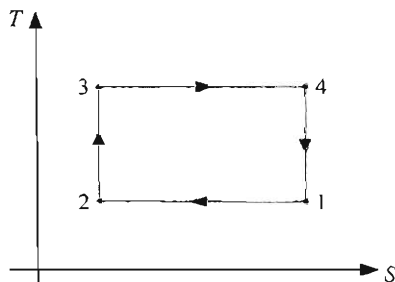
Calculamos finalmente el rendimiento r_C del ciclo mediante la relación:

$$r_C = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{600 \text{ K}} = 0.50 = 50\%$$

El rendimiento r_C del ciclo es: e) $r_C = 50\%$

Problema 1.

Un sistema que consta de 3 kg de helio efectúa el ciclo ilustrado en el plano ST . Si su energía interna disminuye en 2808 kJ y la compresión isentrópica se inicia desde un estado cuya temperatura es de 450 K; a) Llenar los espacios vacíos en la tabla, b) determinar el rendimiento r_C del ciclo.



	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1					
2					
3					
4					
1					
neto			600		

Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $C_V = 3.12 \text{ kJ/kgK}$, $C_P = 5.20 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Para identificar a que proceso corresponde la disminución en la energía interna, en donde se inicia la compresión isentrópica y a qué estado corresponde la temperatura de 450 K, es conveniente analizar cada uno de los procesos de este ciclo, que es información que podemos inferir directamente del diagrama ST así como aplicando la ecuación de la 1ª Ley de la termodinámica. Detallamos a continuación el ciclo:

Paso 1.

El proceso $(1 \rightarrow 2)$ es isotérmico, lo que significa que:

a) $T_1 = T_2 = T_{\min}$, b) $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0$,

Dado que: c) $\Delta S_{1 \rightarrow 2} < 0$, entonces: d) $Q_{1 \rightarrow 2} < 0$ y de la ecuación de 1ª Ley resulta que: e) $Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}$; por lo que: f) $W_{1 \rightarrow 2} < 0$

En resumen este proceso corresponde a una compresión isotérmica.

Paso 2.

El proceso isentrópico $(2 \rightarrow 3)$ está caracterizado por:

a) $\Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0$, b) $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$, c) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} > 0$

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, resulta que,

d) $W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3}$; por lo que: e) $W_{2 \rightarrow 3} < 0$

En resumen este proceso corresponde a una compresión isentrópica. De aquí que la temperatura del estado 2 es el dato que nos proporcionan en este problema: esto es que

$$f) \quad T_2 = T_1 = T_{\min} = 450 \text{ K}$$

Paso 3.

Las características del proceso isotérmico (3→4) son: a) $T_3 = T_4 = T_{\max}$, b) $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = 0$

Dado que: c) $\Delta S_{3 \rightarrow 4} > 0$; entonces, d) $Q_{3 \rightarrow 4} > 0$ y de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4} = 0$, resulta e) $Q_{3 \rightarrow 4} = W_{3 \rightarrow 4}$; por lo que f) $W_{3 \rightarrow 4} > 0$

Este proceso representa a una expansión isotérmica.

Paso 4.

El proceso (4→1) es isoentrópico, lo que significa que: a) $\Delta S_{4 \rightarrow 1} = 0$, b) $Q_{4 \rightarrow 1} = 0$, c) $\Delta U_{4 \rightarrow 1} < 0$, de aquí que el dato de que la energía interna disminuye en 2808 kJ corresponde a este proceso, esto es que: d) $\Delta U_{4 \rightarrow 1} = -2808 \text{ kJ}$

De la aplicación de la ecuación de 1ª Ley a este proceso resulta

$$e) \quad W_{4 \rightarrow 1} = -\Delta U_{4 \rightarrow 1} = -(-2808 \text{ kJ}) = 2808 \text{ kJ}$$

En resumen este proceso corresponde a una expansión isoentrópica, dado que el trabajo es positivo.

Paso 5.

Dado que en un ciclo, a) $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, entonces: b) $W_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} = 600 \text{ kJ}$

También en un ciclo ocurre que: c) $\Delta S_{\text{neto}} = 0$

Como $\Delta U_{\text{neto}} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 4} + \Delta U_{4 \rightarrow 1} = 0$, entonces:

$$d) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{\text{neto}} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{3 \rightarrow 4} + \Delta U_{4 \rightarrow 1}) = 0 - (0 + 0 - 2808) \text{ kJ} = 2808 \text{ kJ}$$

De la ecuación de la 1ª Ley aplicada a este proceso resulta que

$$e) \quad W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -2808 \text{ kJ}$$

De la ecuación para el cálculo de la variación en la energía interna:

$\Delta U_{2 \rightarrow 3} = mC_V (T_3 - T_2)$; se obtiene

$$f) \quad T_3 = T_2 + \frac{\Delta U_{2 \rightarrow 3}}{mC_V} = (450 \text{ K}) + \frac{(2808 \text{ kJ})}{(3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)} = 750 \text{ K} = T_4$$

Paso 6.

El rendimiento r_C del ciclo es igual a:

$$a) \quad r_C = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \frac{450 \text{ K}}{750 \text{ K}} = 0.40 = 40\%$$

Para un ciclo de Carnot se tiene que $r = r_C$, en donde $r = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_u} = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{3 \rightarrow 4}}$

$$\text{de aquí que, } b) \quad Q_{3 \rightarrow 4} = \frac{W_{\text{neto}}}{r} = \frac{600 \text{ kJ}}{0.40} = 1500 \text{ kJ} = W_{3 \rightarrow 4}$$

Como $Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1}$, entonces:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = Q_{\text{neto}} - (Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1}) = 600 \text{ kJ} - (0 + 1500 + 0) \text{ kJ} = -900 \text{ kJ}$$

y por el inciso (1e): $c) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2} = -900 \text{ kJ}$

Paso 7.

Finalmente, de la definición de calor $Q_{i \rightarrow f} = \int_i^f T dS = T_i \Delta S_{i \rightarrow f}$ aplicada a los procesos

isotérmicos ($1 \rightarrow 2$) y ($3 \rightarrow 4$), se tiene que: $\Delta S_{i \rightarrow f} = \frac{Q_{i \rightarrow f}}{T_i}$, así que:

$$a) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{T_1} = \frac{-900 \text{ kJ}}{450 \text{ K}} = -2 \frac{\text{kJ}}{\text{K}},$$

$$b) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 4} = \frac{Q_{3 \rightarrow 4}}{T_3} = \frac{1500 \text{ kJ}}{750 \text{ K}} = 2 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1	450	1b 0	6c -900	6c -900	7a -2
2	450	5d 2808	2b 0	5e -2808	2a 0
3	750	3b 0	6b 1500	6b 1500	7b 2
4	750	4d -2808	4b 0	4e 2808	4a 0
1	450				
neto		5a 0	600	5b 600	5c 0

Problema 2.

3 kg de helio experimentan los cambios siguientes: mediante un proceso isocórico su temperatura disminuye en 300 K; regresan al estado inicial después de un cambio isotérmico seguido de uno isobárico.

a) Llenar la tabla, b) esbozar el diagrama del ciclo en los planos VP y ST ; c) calcular el rendimiento r del ciclo.

	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1					
2					
3	450				
1					
neto					

Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $C_V = 3.12 \text{ kJ/kgK}$, $C_P = 5.20 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

El sistema pasa del estado 1 al 2 mediante un proceso isocórico en el que la temperatura disminuye en 300 K; lo que significa que:

$$a) V_1 = V_2, \quad b) W_{1 \rightarrow 2} = 0, \quad c) \Delta T_{1 \rightarrow 2} = -300 \text{ K}$$

La variación en la energía interna del sistema durante este proceso es:

$$d) \Delta U_{1 \rightarrow 2} = mC_V \Delta T = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (-300 \text{ K}) = -2808 \text{ kJ}$$

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$, resulta que,

$$e) Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = -2808 \text{ kJ}$$

Paso 2.

El proceso (2→3) es isotérmico, por lo que: a) $T_2 = T_3 = 450 \text{ K}$, b) $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0$ y como $\Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 = -300 \text{ K}$; entonces

$$c) T_1 = T_2 - \Delta T_{1 \rightarrow 2} = 450 \text{ K} - (-300 \text{ K}) = 750 \text{ K}$$

En un ciclo: d) $\Delta U_{\text{neto}} = 0 = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1}$, de donde

$$e) \Delta U_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{\text{neto}} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3}) = 0 - (-2808 + 0) \text{ kJ} = 2808 \text{ kJ}$$

Paso 3.

El calor específico a presión constante está definido como $C_p = C_v + R$, esto es que,

$$R = C_p - C_v = 2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

Determinamos la variación en la entropía del sistema para:

$$\text{El proceso isocórico (1} \rightarrow 2\text{): } \Delta S_{1 \rightarrow 2} = mC_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + mR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = mC_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

$$a) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{450}{750} \right) = -4.78 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\text{El proceso isobárico (3} \rightarrow 1\text{): } \Delta S_{3 \rightarrow 1} = mC_p \ln \left(\frac{T_1}{T_3} \right) - mR \ln \left(\frac{P_1}{P_3} \right) = mC_p \ln \left(\frac{T_1}{T_3} \right)$$

$$b) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 1} = (3 \text{ kg}) \left(5.20 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{750}{450} \right) = 7.97 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Ahora bien; dado que: c) $\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 1} = 0$, entonces:

$$d) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{3 \rightarrow 1}) = 0 - (-4.78 + 7.97) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -3.19 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Aplicando la definición de calor para el proceso isotérmico (2 \rightarrow 3):

$$e) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 T dS = T_2 \Delta S_{2 \rightarrow 3} = (450 \text{ K}) \left(-3.19 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -1435.5 \text{ kJ}$$

y de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3} = 0$, resulta que

$$f) \quad W_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} = -1435.5 \text{ kJ}$$

Paso 4.

Para el proceso isobárico (3 \rightarrow 1), de la definición de trabajo:

$$W_{3 \rightarrow 1} = \int_3^1 P dV = \int_3^1 mR dT = mR \Delta T; \text{ se tiene que,}$$

$$a) \quad W_{3 \rightarrow 1} = mR(T_1 - T_3) = (3 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (750 - 450) \text{ K} = 1872 \text{ kJ}$$

y de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$, obtenemos

$$b) \quad Q_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{3 \rightarrow 1} + W_{3 \rightarrow 1} = (2808 + 1872) \text{ kJ} = 4680 \text{ kJ}$$

Paso 5.

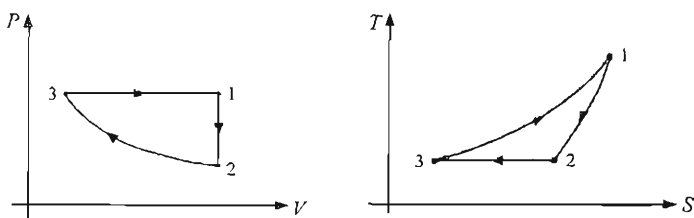
Finalmente, calculamos el calor neto, que es igual al trabajo neto mediante la suma de los calores (trabajos) en cada proceso;

$$Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 1} = W_{\text{neto}}$$

$$a) \quad Q_{\text{neto}} = (-2808 - 1435.5 + 4680) \text{ kJ} = 436.5 \text{ kJ} = W_{\text{neto}}$$

El rendimiento r del ciclo es igual a:

$$b) \quad r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{(Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3})}{Q_{3 \rightarrow 1}} = 1 - \frac{(2808 + 1435.5) \text{ kJ}}{4680 \text{ kJ}} = 0.0933 = 9.33\%$$



	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJ K}^{-1}$
1	$2c$ 750	$1d$ -2808	$1e$ -2808	$1b$ 0	$3a$ -4.78
2	$2a$ 450	$2b$ 0	$3e$ -1435.5	$3f$ -1435.5	$3d$ -3.19
3	450	$2e$ 2808	$4b$ 4680	$4a$ 1872	$3b$ 7.97
1	$2c$ 750				
neto		$2d$ 0	$5a$ 436.5	$5a$ 436.5	$3c$ 0

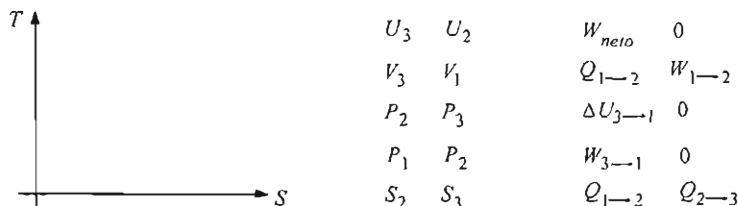
Problema 3.

Un gas ideal experimenta un ciclo caracterizado por los siguientes cambios:

Cambio	κ	Condiciones
1→2	1	$W > 0$
2→3	∞	$\Delta U < 0$
3→1	C_p/C_v	

a) Esbozar el diagrama del ciclo en el plano ST ,

b) escribir el signo correspondiente ($>$, $=$, $<$) para cada par de relaciones a la derecha del diagrama.



Solución:

Paso 1.

Que $\kappa_{1\rightarrow 2} = 1$, indica que el proceso (1→2) es isotérmico lo que significa que:

a) $T_2 = T_1$, b) $\Delta U_{1\rightarrow 2} = 0$

Nos indican que en este proceso $W_{1\rightarrow 2} > 0$ lo cual implica que c) $V_2 > V_1$

Como a temperatura constante el volumen aumenta, entonces la presión debe disminuir, es decir:

d) $P_2 < P_1$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{1\rightarrow 2} = Q_{1\rightarrow 2} - W_{1\rightarrow 2} = 0$, resulta que:

e) $Q_{1\rightarrow 2} = W_{1\rightarrow 2}$ y como el trabajo es positivo, entonces f) $Q_{1\rightarrow 2} > 0$. el signo del calor (positivo o negativo) está relacionado directamente con el aumento o disminución en la entropía del sistema; por lo tanto: g) $S_2 > S_1$

Este proceso se representa en el plano ST mediante una recta paralela al eje de la entropía en la que la entropía debe estar aumentando.

Paso 2.

Dado que $\kappa_{2 \rightarrow 3} = \infty$, entonces el proceso es isocórico, esto es que: a) $V_3 = V_2$

b) $W_{2 \rightarrow 3} = 0$

Se sabe que en este proceso $(U_3 - U_2) = \Delta U_{2 \rightarrow 3} < 0$ lo cual implica que c) $U_3 < U_2$:

por lo que d) $T_3 < T_2$

Como a volumen constante la temperatura disminuye, entonces la presión debe disminuir también; esto es que,

e) $P_1 < P_2$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, resulta que:

f) $Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3}$, y como la energía interna disminuye, entonces: g) $Q_{2 \rightarrow 3} < 0$, por lo tanto:

h) $S_3 < S_2$

Paso 3.

El que $\kappa_{3 \rightarrow 1} = \frac{C_p}{C_v}$ significa que el proceso (3→1) es isocentrópico por lo que:

a) $S_1 = S_3$, b) $Q_{3 \rightarrow 1} = 0$

El proceso se representa en el plano ST mediante una recta paralela al eje de la temperatura, en la que la temperatura debe de aumentar; esto es: c) $T_1 > T_3$, por lo que: d) $\Delta U_{3 \rightarrow 1} > 0$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley, $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$, resulta que:

$W_{3 \rightarrow 1} = -\Delta U_{3 \rightarrow 1} = -(\Delta U_{3 \rightarrow 1})$; esto es que: e) $W_{3 \rightarrow 1} < 0$ y de este inciso se infiere que:

f) $V_1 < V_3$ por lo que, g) $P_1 > P_3$

Paso 4.

En un ciclo, a) $\Delta U_{neto} = Q_{neto} - W_{neto} = 0$, de donde: b) $Q_{neto} = W_{neto}$

$$Q_{neto} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 1} = W_{neto}$$

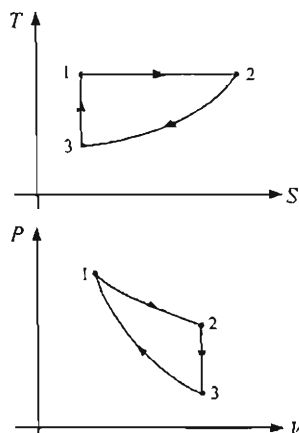
En el plano ST esta suma de los calores intercambiados representa la suma del área bajo la curva que une cada pareja de estados termodinámicos. Como se observa:

$$c) \quad |Q_{1 \rightarrow 2}| > |Q_{2 \rightarrow 3}|$$

Finalmente, dado que $Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = (Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + 0) > 0$, entonces

$$d) \quad W_{\text{neto}} > 0$$

Como parte de la solución de este problema se incluye también el diagrama del ciclo en el plano VP .



$$(2c) \quad U_3 < U_2$$

$$(3f) \quad V_3 > V_1$$

$$(2e) \quad P_2 > P_3$$

$$(1d) \quad P_1 > P_2$$

$$(2h) \quad S_2 > S_3$$

$$(4d) \quad W_{\text{neto}} > 0$$

$$(1e) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}$$

$$(3d) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 1} > 0$$

$$(3e) \quad W_{3 \rightarrow 1} < 0$$

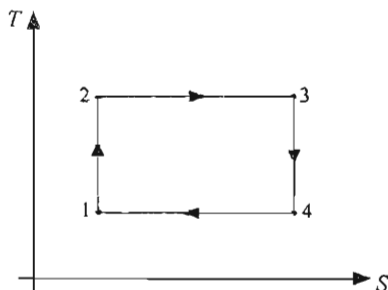
$$(4c) \quad Q_{1 \rightarrow 2} > Q_{2 \rightarrow 3}$$

Problema 1.

Un sistema que consta de 2 kg de helio realiza el ciclo ilustrado en el plano ST , cediendo 1242 kJ de calor a la temperatura de 414 K.

Si el trabajo neto realizado por el sistema es de 1008 kJ; determinar: a) Las variaciones totales en la energía interna y entropía del sistema, b) T_4 , c) $W_{4 \rightarrow 1}$, d) $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$.

Calcular: e) $\Delta S_{2 \rightarrow 3}$, f) $Q_{2 \rightarrow 3}$, g) T_2 , h) $\Delta U_{1 \rightarrow 2}$, i) $W_{3 \rightarrow 4}$, j) el rendimiento r_C del ciclo.



Datos: $m = 2$ kg, $R = 2.08$ kJ/kgK, $C_V = 3.12$ kJ/kgK

Solución:

Paso 1.

En un ciclo la variación neta o total en cualquier variable termodinámica es igual a cero; por lo tanto: a) $\Delta U_{\text{neto}} = 0$ y $\Delta S_{\text{neto}} = 0$

El diagrama ST del ciclo muestra que el sistema intercambia calor con los alrededores durante los procesos isotérmicos ($2 \rightarrow 3$) y ($4 \rightarrow 1$), el signo correspondiente depende de si la entropía aumenta o disminuye.

Dado que para el proceso ($4 \rightarrow 1$) la entropía está disminuyendo, entonces durante este proceso el sistema cede calor a la temperatura constante: b) $T_4 = T_1 = 414$ K, de aquí que: $Q_{4 \rightarrow 1} = -1242$ kJ

Además $\Delta U_{4 \rightarrow 1} = 0 = Q_{4 \rightarrow 1} - W_{4 \rightarrow 1}$; por lo tanto: c) $W_{4 \rightarrow 1} = Q_{4 \rightarrow 1} = -1242$ kJ

Aplicando la definición de calor a este proceso: $Q_{4 \rightarrow 1} = \int_4^1 T dS = T_4 \Delta S_{4 \rightarrow 1}$, resulta que:

$$\Delta S_{4 \rightarrow 1} = \frac{Q_{4 \rightarrow 1}}{T_4} = \frac{-1242 \text{ kJ}}{414 \text{ K}} = -3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 2.

Durante los procesos ($1 \rightarrow 2$) y ($3 \rightarrow 4$) la variación en la entropía del sistema es igual a cero, esto es que: d) $\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \Delta S_{3 \rightarrow 4} = 0$

y dado que $\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1} = 0$, entonces:

$$e) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1}) = 0 - (0 + 0 - 3) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, se tiene que: $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}} = 1008 \text{ kJ}$

El diagrama muestra que durante los procesos (1→2) y (3→4) el sistema no intercambia calor con los alrededores, esto es que: $Q_{1 \rightarrow 2} = 0 = Q_{3 \rightarrow 4}$;

Dado que $Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1} = 1008 \text{ kJ}$, entonces:

$$f) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = Q_{\text{neto}} - (Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1}) = 1008 \text{ kJ} - (0 + 0 - 1242) \text{ kJ} = 2250 \text{ kJ}$$

Aplicando la definición de calor al proceso isotérmico (2→3): $Q_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 T dS = T_2 \Delta S_{2 \rightarrow 3}$,

$$\text{resulta que: } g) \quad T_2 = \frac{Q_{2 \rightarrow 3}}{\Delta S_{2 \rightarrow 3}} = \frac{2250 \text{ kJ}}{3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 750 \text{ K} = T_3$$

La variación en la energía interna del sistema durante el proceso isoentrópico (1→2) es:

$$h) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = m C_v (T_2 - T_1) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (750 - 414) \text{ K} = 2096.64 \text{ kJ}; \text{ y}$$

La variación en la energía interna del sistema durante el proceso isoentrópico (3→4) es:

$$\Delta U_{3 \rightarrow 4} = m C_v (T_4 - T_3) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (414 - 750) \text{ K} = -2096.64 \text{ kJ}$$

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4}$, inferimos que:

$$i) \quad W_{3 \rightarrow 4} = -\Delta U_{3 \rightarrow 4} = -(-2096 \text{ kJ}) = 2096 \text{ kJ}$$

Calculamos finalmente el rendimiento r_C del ciclo mediante la relación:

$$j) \quad r_C = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_4}{T_2} = 1 - \frac{414 \text{ K}}{750 \text{ K}} = 0.448 = 44.8\%$$

Problema 2.

2 kg de helio inicialmente a 750 K experimentan un ciclo caracterizado por los siguientes cambios:

<i>Cambio</i>	<i>Proceso</i>	<i>Condiciones</i>
1→2	isocórico	disminuye su temperatura en 336 K
2→3	isoentrópico	aumenta su temperatura en 111 K
3→1	isobárico	

Esbozar el diagrama del ciclo en los planos: a) VP , b) ST .

Determinar la variación total en: c) energía interna, d) entropía del sistema.

Calcular: e) T_2 , f) T_3 , g) $Q_{1\rightarrow2}$, h) $\Delta S_{1\rightarrow2}$, i) $\Delta S_{3\rightarrow1}$, j) $W_{2\rightarrow3}$, k) $\Delta U_{3\rightarrow1}$, l) $Q_{3\rightarrow1}$, m) W_{neto} , n) el rendimiento r del ciclo.

Datos: $m = 2 \text{ kg}$, $R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 3.12 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

El estado inicial del sistema está caracterizado por: $(P_1, V_1, 750 \text{ K})$

Mediante un proceso isocórico, en el que la temperatura disminuye en 336 K, el sistema llega al estado 2; lo cual significa que

$$a) \quad V_2 = V_1, \quad b) \quad W_{1\rightarrow2} = 0,$$

$$c) \quad \Delta T_{1\rightarrow2} = -336 \text{ K} = T_2 - T_1; \text{ así que: } d) \quad T_2 = T_1 + \Delta T_{1\rightarrow2} = (750 - 336) \text{ K} = 414 \text{ K}$$

La variación en la energía interna del sistema durante este proceso es:

$$e) \quad \Delta U_{1\rightarrow2} = mC_V (T_2 - T_1) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (414 - 750) \text{ K} = -2096.64 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{1\rightarrow2} = Q_{1\rightarrow2} - W_{1\rightarrow2}$, resulta

$$f) \quad Q_{1\rightarrow2} = \Delta U_{1\rightarrow2} = -2096.64 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del sistema para este proceso está dada como:

$$\Delta S_{1\rightarrow2} = mC_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + mR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = mC_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

$$g) \quad \Delta S_{1\rightarrow2} = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{414}{750} \right) = -3.71 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La representación de este proceso en el plano VP es mediante una recta paralela al eje de la presión en la que al disminuir la temperatura, la presión disminuye también. En el plano ST el proceso se representa mediante la curva, de pendiente positiva, ilustrada en la que se muestra que al disminuir la temperatura, la entropía disminuye también.

El estado 2 del sistema queda caracterizado por: $(P_2, V_1, 414 \text{ K})$

Paso 2.

El sistema pasa del estado 2 al 3 mediante un proceso isoentrópico en el que aumenta su temperatura en 111 K ; lo cual significa que:

$$a) \Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0, \quad b) W_{2 \rightarrow 3} = 0,$$

$$c) \Delta T_{2 \rightarrow 3} = 111 \text{ K} = T_3 - T_2; \text{ de donde: } d) T_3 = T_2 + \Delta T_{2 \rightarrow 3} = (414 + 111) \text{ K} = 525 \text{ K}$$

La variación en la energía interna del sistema durante este proceso es:

$$e) \Delta U_{2 \rightarrow 3} = mC_v (T_3 - T_2) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (525 - 414) \text{ K} = 692.64 \text{ kJ}$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, resulta que:

$$f) W_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(692.64 \text{ kJ}) = -692.64 \text{ kJ}$$

Dado que este trabajo es negativo, entonces durante este proceso el volumen disminuye, esto es que: $V_3 < V_2$. Este proceso se representa en el plano VP mediante la curva tipo hipérbola ilustrada, en la que al disminuir el volumen, la presión aumenta; esto es que, $P_3 > P_2$. En el plano ST el proceso se representa mediante la recta paralela al eje de la temperatura en el sentido de T creciente.

El estado 3 del sistema queda caracterizado por: $(P_3, V_3, 525 \text{ K})$

Paso 3.

El proceso $(3 \rightarrow 1)$ es isobárico; por lo que: $P_1 = P_3$

La variación en la energía interna del sistema durante este proceso es:

$$a) \Delta U_{3 \rightarrow 1} = mC_v (T_1 - T_3) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (750 - 525) \text{ K} = 1404 \text{ kJ}$$

De la definición de trabajo: $W_{3 \rightarrow 1} = \int_3^1 P dV = \int_3^1 mRdT = mR\Delta T$; se tiene que

$$b) \quad W_{3 \rightarrow 1} = mR(T_1 - T_3) = (2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (750 - 525) \text{ K} = 936 \text{ kJ}$$

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$ se obtiene

$$c) \quad Q_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{3 \rightarrow 1} + W_{3 \rightarrow 1} = (1404 + 936) \text{ kJ} = 2340 \text{ kJ}$$

$$C_p \text{ está definida como: } C_p = C_v + R = 5.20 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

La variación en la entropía del sistema para este proceso está dada como:

$$\Delta S_{3 \rightarrow 1} = mC_p \ln \left(\frac{T_1}{T_3} \right) - mR \ln \left(\frac{P_1}{P_3} \right) = mC_p \ln \left(\frac{T_1}{T_3} \right)$$

$$d) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 1} = (2 \text{ kg}) \left(5.20 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{750}{525} \right) = 3.71 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La representación de este proceso en el plano VP es mediante una recta paralela al eje del volumen en la que al aumentar la temperatura, el volumen aumenta también; esto es que: $V_1 > V_3$. En el plano ST el proceso se representa mediante la curva, de pendiente positiva, ilustrada en el sentido de S y T crecientes.

El estado final del sistema queda caracterizado por: $(P_1, V_1, 750 \text{ K})$

Paso 4.

La variación neta o total en la energía interna del sistema está dada como:

$$a) \quad \Delta U_{\text{neto}} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1} = (-2096.64 + 692.64 + 1404) \text{ kJ} = 0$$

La variación neta o total en la entropía del sistema es:

$$b) \quad \Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 1} = (-3.71 + 0 + 3.71) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley: $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, entonces $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}}$; en donde:

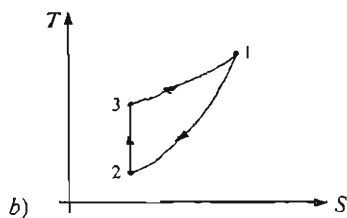
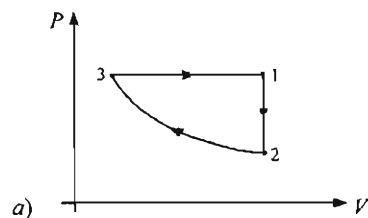
$$c) \quad Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = (-2096.64 + 0 + 2340) \text{ kJ} = 243.36 \text{ kJ} = W_{\text{neto}}$$

Paso 5.

El rendimiento r del ciclo es igual a:

$$a) \quad r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{Q_{3 \rightarrow 1}} = 1 - \frac{2096.64 \text{ kJ}}{2340 \text{ kJ}} = 0.104 = 10.4\%$$

Finalmente las respuestas a las preguntas formuladas son:



c) $\Delta U_{neto} = 0 \quad (4a)$

d) $\Delta S_{neto} = 0 \quad (4b)$

e) $T_2 = 414 \text{ K} \quad (1d)$

f) $T_3 = 525 \text{ K} \quad (2d)$

g) $Q_{1 \rightarrow 2} = -2096.64 \text{ kJ} \quad (1f)$

h) $\Delta S_{1 \rightarrow 2} = -3.71 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \quad (1g)$

i) $\Delta S_{3 \rightarrow 1} = 3.71 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \quad (3d)$

j) $W_{2 \rightarrow 3} = -692.64 \text{ kJ} \quad (2f)$

k) $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = 1404 \text{ kJ} \quad (3a)$

l) $Q_{3 \rightarrow 1} = 2340 \text{ kJ} \quad (3c)$

m) $W_{neto} = 243.36 \text{ kJ} \quad (4c)$

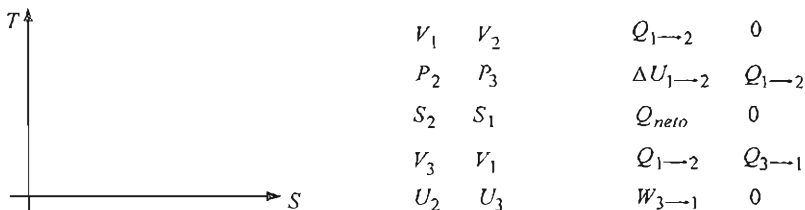
n) $r = 10.4\% \quad (5a)$

Problema 3.

Un gas ideal experimenta un ciclo constituido por los siguientes cambios:

Cambio	κ	Condiciones
1 \rightarrow 2	∞	$\Delta U > 0$
2 \rightarrow 3	C_P/C_V	$W > 0$
3 \rightarrow 1	0	

a) Esbozar el diagrama del ciclo en los planos VP y ST , b) escribir el signo correspondiente ($>$, $=$, $<$) entre cada par de relaciones a la derecha del diagrama.



Solución:

Paso 1.

Dado que $\kappa_{1\rightarrow 2} = \infty$, entonces este proceso es isocórico, esto es que:

a) $V_2 = V_1$, b) $W_{1\rightarrow 2} = 0$

Se sabe que en este proceso $\Delta U_{1\rightarrow 2} = (U_2 - U_1) > 0$ lo cual implica que

c) $U_2 > U_1$, y d) $T_2 > T_1$

Dado que a volumen constante la temperatura aumenta, entonces la presión debe aumentar también; esto es que:

e) $P_2 > P_1$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{1\rightarrow 2} = Q_{1\rightarrow 2} - W_{1\rightarrow 2}$, resulta que

f) $Q_{1\rightarrow 2} = \Delta U_{1\rightarrow 2}$, y como la energía interna aumenta, entonces: g) $Q_{1\rightarrow 2} > 0$

de donde: h) $S_2 > S_1$

La representación de este proceso en el plano VP es mediante una recta paralela al eje de la presión en la que al aumentar la temperatura, la presión aumenta también.

En el plano ST el proceso se representa mediante la curva, de pendiente positiva, ilustrada en la que se muestra que al aumentar la temperatura, la entropía también aumenta.

Paso 2.

Que $\kappa_{2 \rightarrow 3} = \frac{C_p}{C_v}$ significa que el proceso ($2 \rightarrow 3$) es isoentrópico por lo que:

$$a) S_3 = S_2, \quad b) Q_{2 \rightarrow 3} = 0$$

Dado que $W_{2 \rightarrow 3} > 0$, entonces: $c) V_3 > V_2$

El proceso se representa en el plano VP mediante la curva tipo hipérbola ilustrada, en la que como se muestra, al aumentar el volumen, la presión disminuye; esto es:

$$d) P_3 < P_2$$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, resulta que: $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -W_{2 \rightarrow 3}$; y dado que el trabajo es positivo, entonces:

$e) \Delta U_{2 \rightarrow 3} < 0$ y de este inciso se infiere que:

$$f) U_3 < U_2, \text{ por lo que: } g) T_3 < T_2$$

Este proceso se representa en el plano ST mediante una recta paralela al eje de la temperatura, en el sentido de T decreciente.

Paso 3.

Como $\kappa_{3 \rightarrow 1} = 0$, esto significa que el proceso ($3 \rightarrow 1$) es isobárico por lo que:

$$a) P_1 = P_3$$

Para que el sistema regrese al estado inicial este proceso debe ser de compresión; esto es que: $b) W_{3 \rightarrow 1} < 0$, lo que implica que: $c) V_1 < V_3$ y como a presión constante el volumen disminuye, la temperatura debe disminuir también; esto es que: $d) T_1 < T_3$

Esta disminución en temperatura implica que: $e) \Delta U_{3 \rightarrow 1} < 0$

Aplicando la ecuación de 1ª Ley a este proceso: $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$, resulta que: $Q_{3 \rightarrow 1} = \Delta U_{3 \rightarrow 1} + W_{3 \rightarrow 1}$ y dado que ambos sumandos son negativos, entonces:

$$f) Q_{3 \rightarrow 1} < 0; \text{ por lo que: } g) S_1 < S_3$$

Este proceso se representa en el plano VP mediante una recta paralela al eje de volumen, en el que éste último disminuye.

En el plano ST el proceso es representado por la curva de pendiente positiva ilustrada en la que al disminuir la temperatura, hay una disminución en entropía.

Paso 4.

En un ciclo: a) $\Delta U_{neto} = Q_{neto} - W_{neto} = 0$, de donde b) $Q_{neto} = W_{neto}$

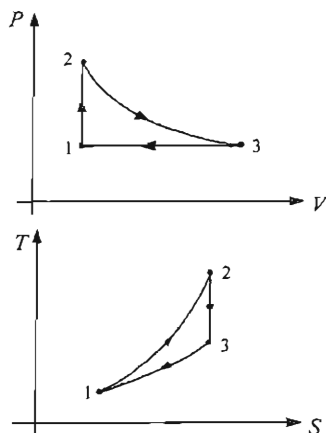
$$Q_{neto} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 1} = W_{neto}$$

En el plano ST esta suma de los calores intercambiados representa la suma del área bajo la curva que une cada pareja de estados termodinámicos. Como se observa,

$$c) |Q_{1 \rightarrow 2}| > |Q_{3 \rightarrow 1}|$$

Finalmente, $Q_{neto} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} = (Q_{1 \rightarrow 2} + 0 - Q_{3 \rightarrow 1}) > 0$
por lo tanto:

$$d) Q_{neto} > 0$$



$$(1a) \quad V_1 = V_2$$

$$(2d) \quad P_2 > P_3$$

$$(1h) \quad S_2 > S_1$$

$$(3c) \quad V_3 > V_1$$

$$(2f) \quad U_2 > U_3$$

$$(1g) \quad Q_{1 \rightarrow 2} > 0$$

$$(1f) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2}$$

$$(4d) \quad Q_{neto} > 0$$

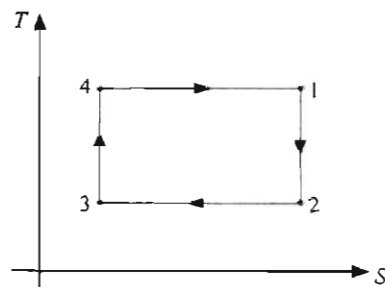
$$(4c) \quad Q_{1 \rightarrow 2} > Q_{3 \rightarrow 1}$$

$$(3b) \quad W_{3 \rightarrow 1} < 0$$

Problema 1.

Un sistema que consta de 2 kg de helio realiza el ciclo mostrado en el plano ST , absorbiendo un calor neto de 900 kJ.

Si a la temperatura de 450 K la entropía del sistema disminuye en 3 kJ/K; a) llenar la tabla, b) calcular el rendimiento r_C del ciclo.



	T/K	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1					
2					
3					
4					
1					
neto					

Datos: $m = 2 \text{ kg}$, $C_V = 3.12 \text{ kJ/kgK}$, $C_P = 5.20 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

En un ciclo se sabe que:

a) $\Delta U_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} - W_{\text{neto}} = 0$, de donde

b) $W_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} = 900 \text{ kJ}$

El diagrama ST muestra que la entropía del sistema disminuye durante el proceso isotérmico ($2 \rightarrow 3$); por lo que:

c) $T_3 = T_2 = 450 \text{ K}$, d) $\Delta S_{2 \rightarrow 3} = -3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$

También se observa en el diagrama ST que los procesos ($1 \rightarrow 2$) y ($3 \rightarrow 4$) son isoentrópicos, lo cual significa que:

e) $Q_{1 \rightarrow 2} = 0 = Q_{3 \rightarrow 4}$, f) $\Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0 = \Delta S_{3 \rightarrow 4}$

Dado que en un ciclo: g) $\Delta S_{\text{neto}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1} = 0$; entonces

$$h) \quad \Delta S_{4 \rightarrow 1} = \Delta S_{\text{neto}} - (\Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4}) = 0 - (0 - 3 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 2.

Los procesos isotérmicos (2→3) y (4→1) están caracterizados por:

$$a) \quad \Delta U_{2 \rightarrow 3} = 0 = \Delta U_{4 \rightarrow 1}$$

entonces de la ecuación de 1ª Ley resulta que el calor y el trabajo intercambiados entre el sistema y los alrededores es igual, y aplicando la definición de calor

$$Q_{i \rightarrow f} = \int_i^f T dS = T_i \int_i^f dS = T_i \Delta S_{if} = W_{i \rightarrow f} \text{ se tiene que}$$

$$b) \quad Q_{2 \rightarrow 3} = T_2 \Delta S_{2 \rightarrow 3} = (450 \text{ K}) \left(-3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -1350 \text{ kJ} = W_{2 \rightarrow 3}$$

La suma del calor intercambiado entre el sistema y los alrededores durante cada proceso nos da el calor neto $Q_{\text{neto}} = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1}$, por lo que el calor intercambiado durante el proceso isotérmico (4→1) es:

$$c) \quad Q_{4 \rightarrow 1} = Q_{\text{neto}} - (Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4}) = 900 \text{ kJ} - (0 - 1350 + 0) = 2250 \text{ kJ} = W_{4 \rightarrow 1}$$

Aplicando la definición de calor para este último proceso: $Q_{4 \rightarrow 1} = T_4 \Delta S_{4 \rightarrow 1}$; resulta que:

$$d) \quad T_4 = \frac{Q_{4 \rightarrow 1}}{\Delta S_{4 \rightarrow 1}} = \frac{2250 \text{ kJ}}{3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 750 \text{ K} = T_1$$

Paso 3.

Determinamos la variación en la energía interna para el proceso (1→2):

$$a) \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = m C_v (T_2 - T_1) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (450 - 750) \text{ K} = -1872 \text{ kJ}$$

y dado que $\Delta U_{\text{neto}} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 4} + \Delta U_{4 \rightarrow 1} = 0$; entonces:

$$b) \quad \Delta U_{3 \rightarrow 4} = \Delta U_{\text{neto}} - (\Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{4 \rightarrow 1}) = 0 - (-1872 + 0 + 0) \text{ kJ} = 1872 \text{ kJ}$$

Para los procesos isoentrópicos (1→2) y (3→4) se tiene a partir de la ecuación de 1ª Ley

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f} - W_{i \rightarrow f} = -W_{i \rightarrow f} \text{ que:}$$

$$c) \quad W_{1 \rightarrow 2} = -\Delta U_{1 \rightarrow 2} = -(-1872 \text{ kJ}) = 1872 \text{ kJ}, \text{ y}$$

$$d) \quad W_{3 \rightarrow 4} = -\Delta U_{3 \rightarrow 4} = -(1872 \text{ kJ}) = -1872 \text{ kJ}$$

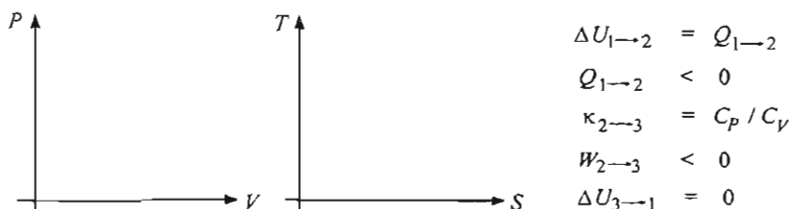
Finalmente, el rendimiento de este ciclo de Carnot es igual a:

$$e) \quad r_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_3}{T_4} = 1 - \frac{450 \text{ K}}{750 \text{ K}} = 0.40 = 40\%$$

	<i>T/K</i>	$\Delta U/\text{kJ}$	Q/kJ	W/kJ	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$
1	^{2d} 750	^{3a} 1872	^{1e} 0	^{3c} 1872	^{1f} 0
2	^{1c} 450	^{2a} 0	^{2b} 1350	^{2b} 1350	^{1d} 3
3	^{1c} 450	^{3b} 1872	^{1e} 0	^{3d} 1872	^{1f} 0
4	^{2d} 750	^{2a} 0	^{2c} 2250	^{2c} 2250	^{1h} 3
1	^{2d} 750				
neto		^{1a} 0	^{1b} 900	^{1b} 900	^{1g} 0

Problema 2.

Esbozar en los planos VP y ST el ciclo formado por tres procesos politrópicos a los que es sometido un gas ideal, tal que se cumplan las relaciones indicadas a la derecha de los planos.



Solución:

Paso 1.

Dado que $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2}$, entonces de la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2}$ concluimos que el proceso $(1 \rightarrow 2)$ es isocórico puesto que $W_{1 \rightarrow 2} = 0$ y como $Q_{1 \rightarrow 2} < 0$ entonces, $\Delta U_{1 \rightarrow 2} < 0$.

Como: $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = mC_V (T_2 - T_1) < 0$; entonces $(T_2 - T_1) < 0$, lo que implica que $T_2 < T_1$.

Adicionalmente, el que $Q_{1 \rightarrow 2} < 0$ significa que la entropía del sistema debe disminuir, es decir: $S_2 < S_1$.

Dado que a volumen constante la temperatura disminuye, entonces la presión debe de disminuir también; esto es que: $P_2 < P_1$.

En base a este análisis, el proceso $(1 \rightarrow 2)$ se representa en el plano VP mediante una recta paralela al eje de la presión, en el sentido de P decreciente. En el plano ST se representa a través de la curva de pendiente positiva mostrada, en la que la entropía y la temperatura están disminuyendo.

Paso 2.

El exponente politrópico dado para el proceso $(2 \rightarrow 3)$ aunado al signo del trabajo, indica que este proceso consiste en una compresión isoentrópica, lo que significa que:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = 0, \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0 \quad \text{y} \quad W_{2 \rightarrow 3} < 0.$$

De la ecuación de 1ª Ley $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3}$, resulta que $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -W_{2 \rightarrow 3}$; pero dado que $W_{2 \rightarrow 3} < 0$; entonces: $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -(-W_{2 \rightarrow 3}) = W_{2 \rightarrow 3}$; de aquí que $\Delta U_{2 \rightarrow 3} > 0$.

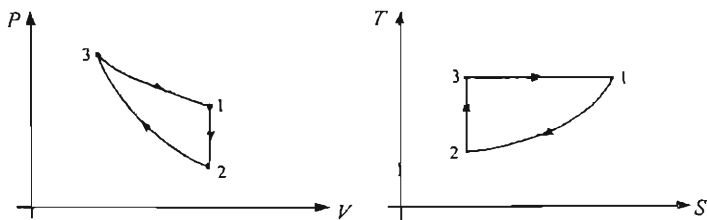
Como $\Delta U_{2 \rightarrow 3} = mC_V (T_3 - T_2) > 0$, entonces $(T_3 - T_2) > 0$ lo cual implica que $T_3 > T_2$.

Por lo tanto, el proceso (2 \rightarrow 3) se representa en el plano VP mediante la curva tipo hipérbola mostrada en el diagrama en la que al disminuir el volumen, la presión aumenta. En el plano ST se representa a través de la recta paralela al eje de la temperatura en el sentido de T creciente.

Paso 3.

Finalmente, dado que $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0$, entonces $\Delta T_{3 \rightarrow 1} = 0$. Esto es que el sistema regresa al estado inicial mediante una expansión isotérmica, que implica que $T_1 = T_3$, $W_{3 \rightarrow 1} > 0$ y de la ecuación de 1ª Ley, $\Delta U_{3 \rightarrow 1} = Q_{3 \rightarrow 1} - W_{3 \rightarrow 1}$, resulta que $Q_{3 \rightarrow 1} = W_{3 \rightarrow 1}$ por lo que, $Q_{3 \rightarrow 1} > 0$.

El ciclo cierra en el plano VP mediante una curva tipo hipérbola en el sentido de V creciente y P decreciente; en tanto que en el plano ST lo hace a través de la recta paralela al eje de la entropía, en el sentido de S creciente.



UNIDAD III

ENTROPÍA Y ESPONTANEIDAD. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Contenido

- 3.1 Procesos Espontáneos, aumento en la Entropía del Universo y Segunda Ley de la Termodinámica.
 - 3.1.1 Expansión Libre de un gas ideal.
 - 3.1.2 Intercambio de energía calorífica entre dos gases ideales aislados de los alrededores.
 - 3.1.3 Intercambio de energía calorífica entre un gas ideal y un almacén térmico.
- 3.2 Máquina Térmica y Refrigerador
- 3.3 Resumen de la Unidad
- 3.4 Problemas Resueltos.

3.1 Procesos espontáneos, aumento en la entropía del universo

Basándose en un gran número de resultados experimentales acumulados a lo largo de los años, se ha podido establecer claramente que la energía en un sistema aislado debe conservarse. La Primera Ley de la termodinámica no puede explicar, sin embargo, ciertos fenómenos físicos observados como los que se mencionan a continuación: la conversión de calor en trabajo no puede efectuarse de manera continua con una eficiencia del 100%; el calor no puede fluir de manera espontánea desde un objeto de baja temperatura hacia otro a temperatura mayor; un gas fluye hacia una cámara de vacío de un modo espontáneo; el agua y la sal se mezclan espontáneamente para formar una solución, pero la separación de esa solución no se puede llevar a cabo sin la ayuda de un agente externo.

Una de las características de lo espontáneo es que no causa asombro: las cosas ocurren como siempre lo han hecho. Científicamente cabe la pregunta de por qué ocurren las cosas como lo hacen. ¿Cómo podemos caracterizar científicamente un proceso que ocurre espontáneamente? ¿Cómo podemos predecir si un proceso ocurrirá espontáneamente? ¿Qué criterio científico tenemos a la mano para afirmar que un cambio está prohibido, esto es, si ocurriera sería inusitado? Para centrar nuestra atención en el conjunto de problemas que serán considerados en esta Unidad, hagamos una primera pregunta: ¿Por qué es imposible comprimir un gas encerrado en un recipiente si la presión externa es menor que la presión interna del gas? ¿Existe, desde el punto de vista termodinámico, alguna característica que podamos asociar a este proceso que nos indique que no es posible efectuarlo? Desde el punto de vista mecánico, podemos argumentar que la suma de las fuerzas sobre la parte móvil de las paredes está dirigida hacia fuera de la región del gas, lo que hará que esta superficie se mueva en esta dirección y, por consiguiente, habrá una expansión y no una compresión. Pero éste es un argumento mecánico y no termodinámico. ¿Existe algún argumento termodinámico que nos indique que este proceso de compresión es imposible? Dejaremos planteado el problema para considerarlo en el contexto de otros cambios cuya ocurrencia natural es imposible.

Pongamos en contacto térmico dos gases, uno de los cuales se encuentra a una temperatura mayor que el otro. ¿Por qué no es posible calentar al gas caliente enfriando al gas de menor temperatura? Desde el punto de vista termodinámico, ¿qué es lo que caracteriza este

cambio que nos indique que es imposible? Este fenómeno es netamente del dominio de la termodinámica. La mecánica no tiene nada que decir al respecto. Es de observarse que este cambio no viola la ley de la conservación de la energía. Es perfectamente posible extraer energía en forma de calor del cuerpo frío para cedérsela al cuerpo de mayor temperatura. La energía se conserva. Desde el punto de vista termodinámico podría argumentarse que la ley cero no se cumpliría, puesto que en lugar de igualarse las temperaturas la diferencia entre ellas se haría más notable: la temperatura menor disminuiría y la temperatura mayor aumentaría. Sin embargo, este argumento es válido si los dos gases estuvieran en contacto un tiempo suficientemente largo para que llegaran, cada uno por separado, al equilibrio. Separemos los gases antes de que lleguen al equilibrio térmico y aislémoslos de toda influencia externa. Esperemos que en esta condición lleguen al estado de equilibrio. Observaremos invariablemente que la temperatura del sistema frío ha aumentado y la del sistema caliente ha disminuido. ¿Será posible caracterizar, termodinámicamente, este resultado experimental?

Un tercer ejemplo se presenta en la expansión libre de un gas. Este nos muestra que el comportamiento natural de un gas es de distribuirse uniformemente en todo el volumen que tenga disponible. Por el contrario, nos sorprendería que el gas, en forma espontánea, redujera el volumen de la región que está ocupando. Analicemos con detalle la expansión libre de un gas ideal que ocupa el volumen V_i a la temperatura T_i . Supongamos que, aislado de los alrededores, se expande libremente en el volumen dV . Puesto que el gas es ideal y perfecto, su temperatura no varía, $dT = 0$; el cambio en su presión, de acuerdo con la forma diferencial de la ecuación de estado $\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$, será $dP = -\left(\frac{P}{V}\right)dV$. Puesto que el gas se encuentra aislado de los alrededores, éstos no se alteran en virtud de la expansión libre.

Por sí mismo, el gas no volverá a tener la presión P y el volumen V , es decir, no se comprimirá espontáneamente. Sólo mediante una acción externa será posible regresar al gas a su estado inicial.

Pongamos al gas en contacto con un almacén mecánico de presión P y con un almacén térmico de temperatura T . El almacén mecánico garantiza que el gas volverá a tener la presión P y el almacén térmico hará que conserve la temperatura T . El gas, por lo tanto, volverá a tener el volumen V .

Puesto que la presión del almacén mecánico es mayor que la del gas, éste será comprimido en $|dV|$. Para esto, el almacén efectuará un trabajo $P|dV|$. Puesto que la temperatura permanece constante, esta energía proporcionada al gas en forma de trabajo deberá cederla al almacén térmico en forma de calor. En suma; el sistema ha regresado a su estado inicial, pero se ha producido un cambio en los alrededores; la energía mecánica del almacén mecánico se ha almacenado como energía interna del almacén térmico. De aquí se concluye que el proceso de la expansión libre de un gas no es reversible.

La energía se ha conservado. Del almacén mecánico se extrajo la energía $d'W = P|dV|$ en forma de trabajo, misma que fue absorbida por el almacén térmico en forma de calor $d'Q = d'W$. La entropía del primer almacén ha permanecido constante, puesto que ha efectuado el trabajo PdV en forma reversible; la entropía del almacén térmico aumentó en la cantidad de $dS = \frac{d'Q}{T} = \frac{PdV}{T}$. Puesto que la entropía del gas no varió, ya que fue regresado a su estado inicial, la entropía del almacén mecánico permaneció constante y la del térmico aumentó, se concluye que la entropía del universo aumentó como consecuencia de la expansión libre del gas.

Consideremos ahora la variación en la entropía del gas $dS = mC_v \left(\frac{dT}{T} \right) + mR \left(\frac{dV}{V} \right)$.

Puesto que se trata de un gas perfecto, la temperatura permanece constante en la expansión libre, esto es, $dT = 0$. Se tendrá entonces $dS = mR \left(\frac{dV}{V} \right) = \frac{PdV}{T}$. Esta última cantidad es igual a la variación en la entropía del almacén térmico producida en el cambio en los alrededores para devolver al gas a su estado inicial después de la expansión libre.

En suma: al expandirse libremente un gas no trasfiere energía a los alrededores. Para devolver al gas a su estado inicial los alrededores transforman una cantidad de trabajo en calor. Esto indica que el proceso no es reversible, ya que, si bien no ha habido un cambio neto en el sistema, si lo ha habido en los alrededores. Por otra parte, la entropía de un gas

aumenta al expandirse libremente, sin que los alrededores se enteren de este cambio, ya que el gas se encuentra aislado. Cuando los alrededores actúan sobre el gas para devolverlo a su estado inicial, resulta que disminuyen la entropía del gas, de modo que el cambio neto en la entropía de éste es igual a cero, aumentando la entropía de los alrededores en la misma proporción.

Observemos que la energía del universo ha permanecido constante. Sólo ha habido un cambio de energía mecánica (la efectuada por el almacén mecánico) en calor absorbido por el almacén térmico. Por otra parte, la **entropía del universo**, $S(\text{universo})$ definida mediante la suma $[S(\text{sistema}) + S(\text{alrededores})]$, ha aumentado; lo que constituye una novedad. *Este ejemplo nos permite sospechar que lo característico de un cambio espontáneo es el aumento en la entropía del universo.*

Pongamos a prueba la sospecha enunciada en el párrafo anterior en otro cambio espontáneo. Consideremos dos gases aislados 1 y 2 que se encuentran en equilibrio, Sean sus temperaturas T_1 y T_2 , respectivamente, con $T_1 > T_2$. Sin permitir que interaccionen con los alrededores, pongámoslos en contacto térmico mediante una pared diatérmica rígida.

Puesto que sus temperaturas son distintas, por la ley cero no se encontrarán en equilibrio térmico. Abandonarán sus respectivos estados de equilibrio para llegar a otros en los que sus temperaturas sean iguales. Puesto que el sistema formado por los dos gases se encuentra aislado de los alrededores, su energía total $U = U_1 + U_2$, deberá permanecer constante. En forma diferencial se tendrá: $dU = dU_1 + dU_2 = 0$. Después de haber estado en contacto térmico durante un intervalo de tiempo pequeño, separemos los gases y esperemos a que cada uno de ellos se encuentre en equilibrio. La variación en la temperatura de los gases ha sido despreciable, ya que la variación en sus respectivas energías internas ha sido pequeña. Puesto que no se ha transferido energía en forma mecánica, de la forma diferencial de la ecuación de Primera Ley, $dU = TdS - PdV$; se tendrá

$$dU_1 = T_1 dS_1 \quad \text{y} \quad dU_2 = T_2 dS_2$$

o sea

$$dS_1 = \frac{dU_1}{T_1} \quad \text{y} \quad dS_2 = \frac{dU_2}{T_2}$$

y la variación total en la entropía del sistema formado por los dos gases será

$$dS = dS_1 + dS_2 = \left(\frac{dU_1}{T_1} \right) + \left(\frac{dU_2}{T_2} \right) = (dU_1) \left[\left(\frac{1}{T_1} \right) - \left(\frac{1}{T_2} \right) \right]$$

Puesto que $T_1 > T_2$, la cantidad encerrada en el paréntesis rectangular es negativa.

Supongamos que $dU_1 > 0$: la variación en la entropía del sistema formado por los dos gases será negativa, $dS < 0$. O sea, la entropía del sistema disminuirá. Pero $dU_1 > 0$ implica que el gas más caliente absorbe energía del más frío y, por lo tanto, aumenta su temperatura. La experiencia nos indica que este cambio es imposible. Entonces deberá tenerse $dU_1 < 0$, lo que conduce a $dS > 0$. Es decir, si en el sistema aislado se efectúa un cambio espontáneo, su entropía deberá aumentar.

Finalmente, supongamos que es posible comprimir un gas aplicando una presión externa P_e menor que la presión interna P del gas: $P_e < P$. Si el volumen disminuye en $|dV|$ el trabajo realizado por los alrededores sobre el sistema será $P_e |dV|$, y si el gas está encerrado en un recipiente de paredes adiabáticas móviles, la variación en la energía interna será $dU = P_e |dV| = -P_e |dV|$. Tendremos entonces que, por la expresión diferencial de la primera ley, $-P_e dV = TdS - PdV$, o sea, $TdS = (P - P_e) dV$. Puesto que $(P - P_e) > 0$ y $dV < 0$, se tendrá que $dS < 0$ (la entropía del sistema ha disminuido). Pero, puesto que la entropía de los alrededores ha permanecido constante, la entropía del universo ha disminuido de lo que se infiere que el proceso es imposible: esto es, no es posible comprimir un gas aplicándole una presión inferior a la presión interna. Se concluye entonces, que la entropía del universo no puede disminuir.

La lista de ejemplos mencionados no es exhaustiva, sin embargo muestra que en todo cambio espontáneo que se efectúe en el universo no podrá disminuir su entropía. Ésta permanecerá constante sólo en aquellos cambios que son reversibles (*que son cambios ideales y que existen sólo en nuestra imaginación*).

Podemos ahora enunciar la **Segunda Ley de la Termodinámica** en la forma siguiente: **la entropía del universo nunca disminuye.**

A continuación analizaremos numéricamente, algunos de los ejemplos mencionados, para mostrar que en todo proceso irreversible se produce un aumento en la entropía del universo.

3.1.1 Expansión libre de un gas ideal

Consideremos un gas ideal en el estado inicial (P_i, V_i, T_i) , aislado como se ilustra en la Figura 1a, el cual se expande libremente llegando al estado final (P_f, V_f, T_i) , como se muestra en la Figura 1b.

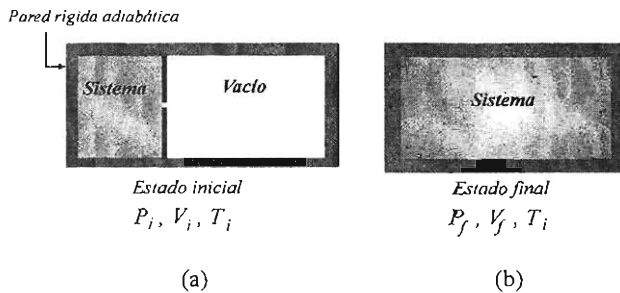


Figura 1

Dado que la tendencia natural del gas es la de ocupar todo el espacio disponible, de la Figura 1b es claro que $V_f > V_i$ y como la temperatura permanece constante, entonces $P_f < P_i$.

La variación en la entropía del sistema está dada, en términos de las variables temperatura y volumen, como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(sist) = mC_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right),$$

o en términos de las variables temperatura y presión:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(sist) = mC_p \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - mR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) = -mR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right);$$

esto es que

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(sist) = mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = -mR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right)$$

la cual es una cantidad positiva dado que $mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$ ó $-mR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right)$ son positivas.

Por otro lado, como el sistema está aislado, los alrededores permanecen inalterados por lo que $\Delta S_{i \rightarrow f}(alred) = 0$.

Finalmente, la variación en la entropía del universo se obtiene de la relación

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(univ) = \Delta S_{i \rightarrow f}(sist) + \Delta S_{i \rightarrow f}(alred) = \Delta S_{i \rightarrow f}(sist) + 0;$$

por lo que en este caso resulta que,

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(univ) = [\Delta S_{i \rightarrow f}(sist)] > 0, \text{ y como}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(univ) = S_f(univ) - S_i(univ), \text{ entonces } S_f(univ) > S_i(univ)$$

por lo que se concluye que la entropía del universo aumenta como resultado de la expansión libre de un gas ideal.

Consideremos que el gas mostrado en la Figura 1a es helio: $m = 2 \text{ kg}$, $R = 2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$, que se expande libremente desde el estado inicial (P_i, V_i, T_i) , duplicando su volumen.

Dado que $T_f = T_i$, de la ecuación de estado de gas ideal, $P_f = \frac{mRT_f}{V_f} = \frac{mRT_i}{2V_i} = \frac{P_i}{2}$; por lo

que el estado final del sistema es $(P_f, V_f, T_f) = \left(\frac{P_i}{2}, 2V_i, T_i\right)$.

La variación en la entropía del universo es

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) + 0, \text{ esto es}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = mR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + 0 = mR \ln\left(\frac{2V_i}{V_i}\right) = mR \ln(2)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = (2\text{kg})\left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right) \ln(2) = 2.88 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

cantidad que por ser positiva nos indica que la entropía del universo aumenta.

3.1.2 Intercambio de energía calorífica entre dos gases ideales aislados de los alrededores

Consideremos los sistemas A y B , ilustrados en la Figura 2, que se ponen en contacto térmico (manteniendo constante su volumen) hasta que alcanzan el equilibrio.

El estado inicial de cada sistema es (P_{Ai}, V_{Ai}, T_{Ai}) y (P_{Bi}, V_{Bi}, T_{Bi}) respectivamente y cada sistema se distingue por sus constantes R_A, C_{VA} y R_B, C_{VB} . Dado que la pared que los separa es rígida diatérmica, A y B intercambiarán calor hasta que, de acuerdo con la Ley Cero, al

llegar al equilibrio su temperatura final será la misma, esto es que $T_{Af} = T_{Bf} = T_f$; por lo que el respectivo estado final de cada sistema es (P_{Af}, V_{Af}, T_f) y (P_{Bf}, V_{Bf}, T_f) .

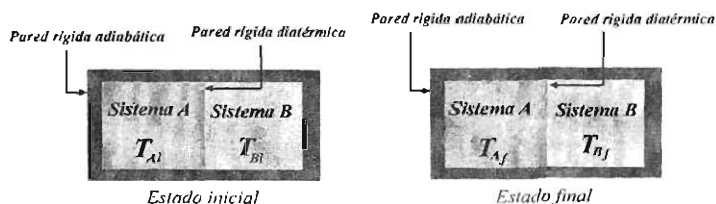


Figura 2

Para determinar la temperatura final de equilibrio se procede de la siguiente manera:

Dado que los sistemas A y B están confinados en un recipiente de paredes rígidas adiabáticas, entonces no tienen interacción mecánica ni térmica con los alrededores, por lo que: $\Delta U = (\Delta U_A + \Delta U_B) = Q - W = 0$; de donde $\Delta U_A = -\Delta U_B$; es decir

$m_A C_{vA} (T_f - T_{Ai}) = -m_B C_{vB} (T_f - T_{Bi})$; desarrollando esta expresión resulta que,

$T_f (m_A C_{vA} + m_B C_{vB}) = m_A C_{vA} T_{Ai} + m_B C_{vB} T_{Bi}$, de donde:

$$T_f = \frac{m_A C_{vA} T_{Ai} + m_B C_{vB} T_{Bi}}{m_A C_{vA} + m_B C_{vB}} \quad (3.1.1)$$

Esta ecuación se simplifica para los casos siguientes:

Cuando se trata del mismo gas; esto es que $C_{vA} = C_{vB}$, la temperatura final de equilibrio se obtiene a través de la expresión

$$T_f = \frac{m_A T_{Ai} + m_B T_{Bi}}{m_A + m_B} \quad (3.1.2)$$

y si además de tratarse del mismo gas tienen igual masa; $m_A = m_B$, la temperatura final de equilibrio es simplemente el promedio aritmético de las temperaturas iniciales de cada gas.

$$T_f = \frac{T_{Ai} + T_{Bi}}{2} \quad (3.1.3)$$

La variación en la entropía para el sistema A está dada como

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist } A) = m_A C_{VA} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Ai}} \right) + m_A R_A \ln \left(\frac{V_{Af}}{V_{Ai}} \right) = m_A C_{VA} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Ai}} \right)$$

y para el sistema B

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist } B) = m_B C_{VB} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Bi}} \right) + m_B R_B \ln \left(\frac{V_{Bf}}{V_{Bi}} \right) = m_B C_{VB} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Bi}} \right)$$

Como A y B no tienen interacción mecánica ni térmica con los alrededores, entonces

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = 0$$

La variación en la entropía del universo es:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist } A) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist } B) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}), \text{ esto es que}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist } A) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist } B) + 0 = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist } A) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist } B)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = m_A C_{VA} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Ai}} \right) + m_B C_{VB} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Bi}} \right)$$

en donde T_f está dada a través de la ecuación (3.1.1), (3.1.2) ó (3.1.3) según sea el caso.

Determinemos la variación en la entropía del universo en el caso en que el sistema A es helio, de masa $m_A = 5 \text{ kg}$ a la temperatura $T_{Ai} = 500 \text{ K}$ y $C_{vA} = 3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$; en tanto que el sistema B es aire, $m_B = 8 \text{ kg}$, $T_{Bi} = 300 \text{ K}$ y $C_{vB} = 0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$.

De acuerdo con la ecuación (3.1.1), la temperatura final de equilibrio es,

$$T_f = \frac{(5 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (500 \text{ K}) + (8 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 \text{ K})}{(5 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) + (8 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)} = 446.07 \text{ K}$$

la variación en la entropía del universo es

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = m_A C_{vA} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Ai}} \right) + m_B C_{vB} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Bi}} \right), \text{ sustituyendo valores numéricos:}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = (5 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{446.07}{500} \right) + (8 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{446.07}{300} \right)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = (-1.78 + 2.28) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.50 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}, \text{ y como}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = S_f(\text{univ}) - S_i(\text{univ}), \text{ entonces } S_f(\text{univ}) > S_i(\text{univ})$$

es decir que la entropía del universo aumenta como resultado del intercambio de energía calorífica entre dos gases ideales aislados.

3.1.3 Intercambio de energía calorífica entre un gas ideal y un almacén térmico

El gas ideal a la temperatura inicial T_i , ilustrado en la Figura 3, intercambia energía calorífica con un almacén térmico cuya temperatura es T_{alm} , hasta que llegan al equilibrio.



Figura 3

El sistema está en el estado inicial (P_i, V_i, T_i) y como éste interactúa sólo en forma térmica con los alrededores, su volumen permanece constante. La Ley Cero de la Termodinámica establece que cuando dos sistemas llegan al equilibrio térmico deben tener el mismo valor de temperatura; dado que el almacén térmico se caracteriza por mantener su temperatura, T_{alm} constante, entonces la temperatura final, T_f del sistema debe coincidir con la del almacén, $T_f = T_{alm}$. Por lo tanto, el estado final del sistema es $(P_f, V_f, T_f) = (P_f, V_i, T_{alm})$.

La variación en la entropía del sistema está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f} (sist) = mC_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = mC_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

La variación en la entropía del almacén térmico se define como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f} (alm) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} \quad (3.1.4)$$

en donde $Q_{alm} = -Q_{sist} = -Q$

y de la ecuación de Primera Ley, dado que el volumen del sistema permanece constante,

$$Q = \Delta U = mC_v (T_f - T_i)$$

Por lo que la variación en la entropía del almacén térmico queda en la forma

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alm}) = \frac{Q_{\text{alm}}}{T_{\text{alm}}} = -\frac{Q}{T_{\text{alm}}} = -\frac{mC_v (T_f - T_i)}{T_{\text{alm}}} \quad (3.1.5)$$

La variación en la entropía del universo es:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alm}),$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = mC_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - \frac{mC_v (T_f - T_i)}{T_{\text{alm}}}$$

Determinemos la variación en la entropía del universo en el caso en que el sistema sea helio, de masa $m = 5 \text{ kg}$, a la temperatura inicial $T_i = 500 \text{ K}$ y $C_v = 3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$; en tanto que la temperatura del almacén térmico es $T_{\text{alm}} = 300 \text{ K}$.

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{300}{500} \right) - \left[\frac{(2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (500 - 300) \text{ K}}{300 \text{ K}} \right]$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = (-3.19 + 4.16) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = + 0.97 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}, \text{ y como}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = S_f(\text{univ}) - S_i(\text{univ}), \text{ entonces } S_f(\text{univ}) > S_i(\text{univ})$$

por lo que se concluye que la entropía del universo aumenta como resultado del intercambio de energía en forma de calor entre un gas ideal y un almacén térmico.

La expansión libre del gas ideal, el intercambio de energía calorífica entre dos gases ideales aislados así como el intercambio de calor entre un gas ideal y un almacén térmico son ejemplos de procesos en los que la entropía del universo aumenta por lo que son llamados **procesos irreversibles**.

Un proceso será reversible si la entropía del universo permanece constante, esto es que $\Delta S(\text{univ}) = 0$.

3.2 Máquina Térmica y Refrigerador

Una **máquina térmica** es un sistema que opera en ciclos para lo cual recibe el calor Q_a de un almacén térmico a la temperatura T_a , parte de esa energía calorífica la transforma en energía mecánica, en forma de trabajo W y el remanente de energía calorífica que no pudo ser transformado en trabajo es cedido como el calor Q_c a un almacén térmico a la temperatura T_c como se ilustra en la Figura 4, en donde $T_a > T_c$.

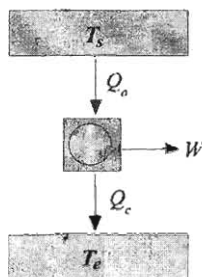


Figura 4

De acuerdo con la Primera Ley, $\Delta U = Q - W = 0$; de donde

$$W = Q = Q_a - Q_c \quad (3.2.1)$$

lo que significa que se cumple con la Ley de la Conservación de la energía.

La variación en la entropía del universo es:

$$\Delta S(\text{univ}) = \Delta S(\text{sist}) + \Delta S(\text{alred}) = \Delta S(\text{sist}) + \Delta S(\text{alm } T_s) + \Delta S(\text{alm } T_e),$$

en donde $\Delta S(\text{sist}) = 0$ porque opera en ciclos, $\Delta S(\text{alm } T_s) = -\frac{Q_a}{T_s}$ y $\Delta S(\text{alm } T_e) = \frac{Q_c}{T_e}$

$$\Delta S(\text{univ}) = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e} \quad (3.2.2)$$

Si $\Delta S(\text{univ}) = 0$ se dice que la máquina térmica opera en forma **Posible Reversible**

Si $\Delta S(\text{univ}) > 0$ se dice que la máquina térmica opera en forma **Posible Irreversible**

Si $\Delta S(\text{univ}) < 0$ la máquina térmica es **Imposible**

Se define la eficiencia o rendimiento r de la máquina como $r = \frac{W}{Q_a}$ y usando la ecuación

(3.2.1),

$$r = \frac{W}{Q_a} = \frac{Q_a - Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} \quad (3.2.3)$$

Como se observa de esta última relación, si $Q_c = 0$ la eficiencia sería del 100%. Esto implica que todo el calor que la máquina recibe es transformado íntegramente en trabajo y la variación en la entropía del universo, ecuación (3.2.2) sería negativa; esto es que la entropía del universo disminuye, lo cual constituye una violación a la Segunda ley de la Termodinámica. De aquí que la eficiencia es siempre menor del 100%. En otras palabras, no existe en la naturaleza ningún dispositivo operando cíclicamente tal que transforme íntegramente en trabajo toda la energía calorífica que recibe.

Si la máquina opera bajo el ciclo de Carnot, dado que este último es un ciclo reversible, entonces:

$$\Delta S(\text{univ}) = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e} = 0; \text{ esto es que } \frac{Q_c}{T_e} = \frac{Q_a}{T_s}, \text{ por lo que } \frac{Q_c}{Q_a} = \frac{T_e}{T_s}; \text{ luego entonces de}$$

$$\text{la ecuación (3.2.3) se tendrá } r_c = 1 - \frac{T_e}{T_s} = r_{\max}.$$

Por lo tanto cualquier máquina térmica posible irreversible operando entre los almacenes T_s y T_e tendrá una eficiencia menor que una máquina de Carnot operando entre los mismos almacenes térmicos.

Consideremos ahora a un sistema que opera en ciclos que recibe el calor Q_a de un almacén térmico a la temperatura T_e , y cede el calor Q_c a un almacén térmico a la temperatura T_s , para lo cual debe de suministrársele un trabajo W al sistema como se ilustra en la Figura 5, en donde $T_s > T_e$. El sistema es llamado un **Refrigerador**.

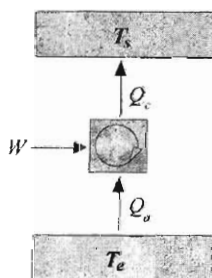


Figura 5

En este caso el trabajo es negativo puesto que se está suministrando al sistema, entonces de acuerdo con la ley de conservación de la energía

$$-W = Q_a - Q_c \quad (3.2.4)$$

La variación en la entropía del universo es:

$$\Delta S(\text{univ}) = \Delta S(\text{sist}) + \Delta S(\text{alred}) = \Delta S(\text{sist}) + \Delta S(\text{alm } T_s) + \Delta S(\text{alm } T_c),$$

en donde $\Delta S(\text{sist}) = 0$ porque opera en ciclos, $\Delta S(\text{alm } T_s) = \frac{Q_c}{T_s}$ y $\Delta S(\text{alm } T_c) = -\frac{Q_o}{T_c}$

$$\Delta S(\text{univ}) = 0 + \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_o}{T_c} \quad (3.2.5)$$

Si $\Delta S(\text{univ}) = 0$ se dice que el refrigerador opera en forma **Posible Reversible**

Si $\Delta S(\text{univ}) > 0$ se dice que el refrigerador opera en forma **Posible Irreversible**

Si $\Delta S(\text{univ}) < 0$ el refrigerador es **Imposible**

Se define al coeficiente de funcionamiento β del refrigerador como $\beta = \frac{Q_o}{W}$ y usando la ecuación (3.2.4),

$$\beta = \frac{Q_o}{W} = \frac{Q_o}{Q_c - Q_o} = \frac{Q_o}{Q_o \left(\frac{Q_c}{Q_o} \right) - Q_o} = \frac{1}{\frac{Q_c}{Q_o} - 1} \quad (3.2.6)$$

El coeficiente de funcionamiento puede ser un número mayor que la unidad y no se expresa como un porcentaje.

Si el refrigerador opera bajo el ciclo de Carnot, dado que este último es un ciclo reversible, entonces,

$\Delta S(univ) = 0 + \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_a}{T_e} = 0$; esto es que $\frac{Q_c}{T_s} = \frac{Q_a}{T_e}$, por lo que $\frac{Q_c}{Q_a} = \frac{T_s}{T_e}$; luego entonces de

la ecuación (3.2.6) se tendrá $\beta_c = \frac{1}{\frac{T_s}{T_e} - 1} = \beta_{\max}$.

Por lo tanto cualquier refrigerador posible irreversible operando entre los almacenes T_s y T_e tiene un coeficiente de funcionamiento menor que el correspondiente al refrigerador de Carnot operando entre los mismos almacenes térmicos.

3.3 Resumen de la Unidad

Variación en la entropía del gas ideal

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = mC_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = mC_p \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - mR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = mC_p \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) + mC_V \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right)$$

Variación en la entropía de un almacén térmico

$$\Delta S_{i \rightarrow f} (alm) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = -\frac{Q_{sist}}{T_{alm}} = -\frac{mC_V (T_f - T_i)}{T_{alm}}$$

Eficiencia o rendimiento r de una máquina térmica

$$r = \frac{W}{Q_a} = \frac{Q_a - Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}$$

Coefficiente de funcionamiento β de un refrigerador

$$\beta = \frac{Q_o}{W} = \frac{Q_o}{Q_c - Q_o} = \frac{Q_o}{Q_o \left(\frac{Q_c}{Q_o} \right) - Q_o} = \frac{1}{\frac{Q_c}{Q_o} - 1}$$

**3.4 Problemas Resueltos de la Selección de Problemas de Termodinámica,
Modelo de Tercera Evaluación Parcial**

Problema 1.

4 kg de helio inicialmente a 175 kPa y 200 K experimentan los siguientes cambios:

Pasan del estado 1 al 2 mediante un proceso reversible a presión constante, aumentando su temperatura en 100 K; a continuación por medio de un proceso isoentrópico su presión aumenta hasta 200 kPa; finalmente llega al estado 4 a través de una expansión libre adiabática, aumentando su volumen en 1.84 m³.

Calcular las cantidades pedidas en la tabla.

	P/kPa	V/m^3	T/K		$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$		
				Sistema	Alrededores	Universo	
1							
2							
3							
4							

Datos: $m = 4 \text{ kg}$, $C_v = 3.12 \text{ kJ/kgK}$, $C_p = 5.20 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Dado que: $C_p = C_v + R$; entonces: $R = C_p - C_v = 2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

Se conocen la presión y la temperatura en el estado inicial, por lo que de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ calculamos:

$$a) \quad V_1 = \frac{mRT_1}{P_1} = \frac{(4 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (200 \text{ K})}{\left(175 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 9.51 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 9.51 \text{ m}^3$$

El sistema pasa del estado 1 al 2 mediante un proceso reversible a presión constante aumentando su temperatura en 100 K, entonces: b) $P_2 = P_1 = 175 \text{ kPa}$,

c) $\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) = 0$, d) $\Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 = 100 \text{ K}$; de donde:

$$e) \quad T_2 = T_1 + \Delta T_{1 \rightarrow 2} = (200 + 100) \text{ K} = 300 \text{ K}$$

Determinamos la variación en la entropía del sistema mediante la ecuación

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = mC_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - mR \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = mC_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

$$f) \Delta S_{1 \rightarrow 2}(sist) = (4 \text{ kg}) \left(5.20 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{300}{200} \right) = 8.43 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como $\Delta S_{1 \rightarrow 2}(univ) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(sist) + \Delta S_{1 \rightarrow 2}(alred) = 0$; entonces

$$g) \Delta S_{1 \rightarrow 2}(alred) = -\Delta S_{1 \rightarrow 2}(sist) = -8.43 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Finalmente, para este proceso, mediante la ecuación de estado determinamos:

$$h) V_2 = \frac{mRT_2}{P_2} = \frac{(4 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 \text{ K})}{\left(175 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 14.26 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 14.26 \text{ m}^3$$

Paso 2.

El sistema pasa del estado 2 al 3 mediante un proceso isoentrópico, en el que su presión aumenta hasta 200 kPa ; esto significa que:

$$a) \Delta S_{2 \rightarrow 3}(sist) = 0, \quad b) \Delta S_{2 \rightarrow 3}(univ) = 0, \quad c) \Delta S_{2 \rightarrow 3}(alred) = 0, \quad d) P_2 = 200 \text{ kPa}$$

Dado que la variación en la entropía del sistema es igual a cero, de la ecuación:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3}(sist) = mC_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) - mR \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = 0, \quad \text{se tiene que: } mC_p \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) = mR \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right);$$

$$\text{esto es: } \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) = \frac{R}{C_p} \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{R/C_p}, \quad \text{ó} \quad \left(\frac{T_3}{T_2} \right) = \left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{R/C_p}$$

de donde:

$$e) T_3 = T_2 \left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{R/C_p} = (300 \text{ K}) \left(\frac{200}{175} \right)^{2.08/5.20} = 316.46 \text{ K}$$

Finalmente, mediante la ecuación de estado determinamos:

$$f) \quad V_3 = \frac{mRT_3}{P_3} = \frac{(4 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (316.46 \text{ K})}{\left(200 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 316 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 13.16 \text{ m}^3$$

Paso 3.

El sistema pasa del estado 3 al 4 mediante una expansión libre adiabática, aumentando su volumen en 1.84 m^3 ; lo cual significa que: a) $T_4 = T_3 = 316.46 \text{ K}$,

b) $\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred}) = 0$, c) $\Delta V_{3 \rightarrow 4} = V_4 - V_3 = 1.84 \text{ m}^3$; de donde:

$$d) \quad V_4 = V_3 + \Delta V_{3 \rightarrow 4} = (13.16 + 1.84) \text{ m}^3 = 15.0 \text{ m}^3$$

A través de la ecuación de estado de gas ideal calculamos:

$$e) \quad P_4 = \frac{mRT_4}{V_4} = \frac{(4 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (316.46 \text{ K})}{(15 \text{ m}^3)} = 175.53 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 175.53 \text{ kPa}$$

La variación en la entropía del sistema para el proceso (3→4) está dada como

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) = mC_V \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) + mR \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = mR \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

$$f) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) = (4 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln\left(\frac{15}{13.16}\right) = 1.09 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Para este proceso; $\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{univ}) = \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred})$

$$g) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{univ}) = (1.09 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 1.09 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$		
				Sistema	Alrededores	Universo
1	175	9.51	200	1f 8.43	1g -8.43	1c 0
2	175	14.26	300	2a 0	2e 0	2b 0
3	200	13.16	316.46	3f 1.09	3b 0	3g 1.09
4	175.53	15	316.46			

Problema 2.

Un sistema opera en ciclos entre dos almacenes térmicos; absorbiendo una cantidad de calor Q_a del almacén a la temperatura de 400 K , cediendo una cantidad de calor Q_c al almacén a la temperatura de 200 K y realizando un trabajo neto W .

Determinar, en cada uno de los casos propuestos, si el ciclo es posible (reversible o irreversible) o imposible.

a) el sistema absorbe 400 kJ de calor del almacén a temperatura alta y cede 200 kJ de calor al almacén a baja temperatura _____,

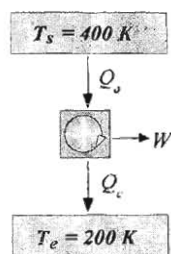
b) El almacén a temperatura alta cede 600 kJ de calor y el sistema realiza un trabajo neto de 150 kJ _____,

c) El sistema realiza un ciclo con un rendimiento de 60% y cede 100 kJ de calor al almacén a temperatura menor _____.

Datos generales: $T_s = 400\text{ K}$, $T_e = 200\text{ K}$

Solución:

a)



Datos: $Q_a = 400\text{ kJ}$, $Q_c = 200\text{ kJ}$

Dado que la energía se conserva, entonces $W = Q_a - Q_c = (400 - 200)\text{ kJ} = 200\text{ kJ}$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

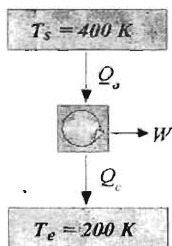
En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm\ T_s} + \Delta S_{alm\ T_e} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{400\text{ kJ}}{400\text{ K}} + \frac{200\text{ kJ}}{200\text{ K}} \right) = (-1 + 1) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0$$

y como ΔS_{univ} es igual a cero, concluimos que el ciclo es: *posible reversible*

b)



Datos: $Q_a = 600\text{ kJ}$, $W = 150\text{ kJ}$

Dado que la energía se conserva, entonces $W = Q_a - Q_c$, de donde:

$$Q_c = Q_a - W = (600 - 150)\text{ kJ} = 450\text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

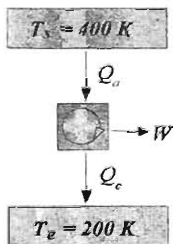
En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente. y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm\ T_s} + \Delta S_{alm\ T_e} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{600\text{ kJ}}{400\text{ K}} + \frac{450\text{ kJ}}{200\text{ K}} \right) = (-1.5 + 2.25) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.75 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como ΔS_{univ} es positiva, concluimos que el ciclo es: *posible irreversible*

c)



Datos: $Q_c = 100 \text{ kJ}$, $r = 60\% = 0.60$

De la definición de rendimiento: $r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}$; se tiene que: $\frac{Q_c}{Q_a} = 1 - r$, de donde:

$$Q_a = \frac{Q_c}{(1-r)} = \frac{100 \text{ kJ}}{(1-0.6)} = 250 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alm T_c} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_c}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_c}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{250 \text{ kJ}}{400 \text{ K}} + \frac{100 \text{ kJ}}{200 \text{ K}} \right) = (-0.625 + 0.50) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -0.125 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como ΔS_{univ} es negativa, concluimos que el ciclo es: *imposible*

Problema 1.

2.5 kg de gas metano se hallan inicialmente a la temperatura de 200 K y ocupan un volumen de 0.30 m³. Se quieren llevar hasta una temperatura de 300 K en dos formas distintas:

Forma A: Se ponen en contacto térmico (a volumen constante) con un almacén a 300 K hasta llegar al equilibrio.

Forma B: El gas se comprime isentrópicamente hasta alcanzar los 300 K de temperatura deseados.

Llenar las tablas.

Forma A			Forma B		
	P/kPa	V/m ³		P/kPa	V/m ³
i			i		
f			f		

$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$	Sistema	Alrededores	Universo
Forma A			
Forma B			

Datos: $C_V = 1.74 \text{ kJ/kgK}$, $R = 0.52 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Se conocen la temperatura y el volumen en el estado inicial, por lo que de la ecuación de estado de gas ideal, $PV = mRT$ calculamos:

$$a) \quad P_i = \frac{mRT_i}{V_i} = \frac{(2.5 \text{ kg}) \left(0.52 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (200 \text{ K})}{(0.30 \text{ m}^3)} = 866.67 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 866.67 \text{ kPa}$$

El estado inicial, que es el mismo para ambas formas de variar la temperatura, está caracterizado como:

$$(P_i, V_i, T_i) = (866.67 \text{ kPa}, 0.30 \text{ m}^3, 200 \text{ K})$$

Paso 2.

Forma A:

El sistema se pone en contacto térmico (manteniendo constante su volumen) con un almacén térmico hasta que ambos llegan al equilibrio. Esto significa que:

$$a) \quad V_2 = V_i = 0.30 \text{ m}^3, \quad b) \quad T_f = T_{alm} = 300 \text{ K}$$

La variación en la entropía del sistema está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) = m C_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + m R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = m C_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

$$c) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) = (2.5 \text{ kg}) \left(1.74 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{300}{200} \right) = 1.76 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-m C_V (T_f - T_i)}{T_{alm}}; \text{ esto es que:}$$

$$d) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \frac{-(2.5 \text{ kg}) \left(1.74 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 - 200) \text{ K}}{300 \text{ K}} = -1.45 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía del universo: $\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})$ resulta ser

$$e) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = (1.76 - 1.45) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.31 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La presión final del sistema la obtenemos mediante la ecuación de estado:

$$f) \quad P_f = \frac{m R T_f}{V_f} = \frac{(2.5 \text{ kg}) \left(0.52 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (300 \text{ K})}{(0.30 \text{ m}^3)} = 1300 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 1300 \text{ kPa}$$

Paso 3.

Forma B:

El gas se comprime isoentrópicamente. Esto significa que:

$$a) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) = 0, \quad b) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = 0, \quad c) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = 0$$

Usando la ecuación para la variación en la entropía del sistema:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) = mC_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + mR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = 0,$$

resulta que: $mR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = -mC_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right);$

por lo tanto: $\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = -\frac{C_v}{R} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \ln\left(\frac{T_i}{T_f}\right)^{-(C_v/R)}$; de donde:

$$d) \quad V_f = V_i \left(\frac{T_i}{T_f}\right)^{-(C_v/R)} = (0.30 \text{ m}^3) \left(\frac{300}{200}\right)^{-(1.74/0.52)} = 0.077 \text{ m}^3$$

Finalmente, mediante la ecuación de estado determinamos

$$e) \quad P_f = \frac{mRT_f}{V_f} = \frac{(2.5 \text{ kg}) \left(0.52 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right) (300 \text{ K})}{(0.077 \text{ m}^3)} = 5064.93 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 5064.93 \text{ kPa}$$

Forma A

i	P/kPa	V/m ³	T/K
1a	866.67	0.30	200
2f	1300	0.30	300

Forma B

i	P/kPa	V/m ³	T/K
1a	866.67	0.30	200
3e	5064.93	0.077	300

$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$	Sistema	Alrededores	Universo
Forma A	2c 1.76	2d -1.45	2e 0.31
Forma B	3a 0	3c 0	3b 0

Problema 2.

2 kg de helio se encuentran inicialmente a 300 K en un recipiente de paredes rígidas y diatérmicas. Se desea elevar su temperatura a 900 K en dos formas distintas:

Forma A: Se ponen en contacto térmico con un almacén cuya temperatura es de 900 K hasta que ambos llegan al equilibrio.

Forma B: Se ponen en contacto térmico, primero con un almacén a 500 K y después que han alcanzado el equilibrio térmico, con un almacén a 900 K.

Llenar la tabla.

$\Delta S/\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$	Sistema	Alrededores	Universo
Forma A			
Forma B			

Datos: $R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 3.12 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

FORMA A



Dado que el sistema interactúa únicamente en forma térmica con los alrededores, su volumen permanece constante. La Ley Cero de la Termodinámica establece que cuando dos sistemas llegan al equilibrio térmico deben tener el mismo valor de temperatura; y como el almacén térmico se caracteriza por mantener su temperatura, T_{alm} constante, entonces la temperatura final, T_f , del sistema debe coincidir con la del almacén; esto es

$$T_f = T_{alm} = 900\text{ K}.$$

La variación en la entropía del sistema está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) = mC_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + mR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = mC_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) = (2\text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln\left(\frac{900}{300}\right) = 6.86 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-mC_v(T_f - T_i)}{T_{alm}}; \text{ esto es que}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \frac{-(2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (900 - 300) \text{ K}}{900 \text{ K}} = -4.16 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía del universo: $\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})$ es:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = (6.86 - 4.16) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 2.7 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Solución:

FORMA B

Esta segunda forma de variar la temperatura del sistema consta de dos etapas:

Etapas I

La primera etapa consiste en poner al sistema en contacto térmico con un almacén a la temperatura $T_{alm} = 500 \text{ K}$; por lo que al llegar al equilibrio térmico con este almacén, la temperatura final del sistema será $T_f = 500 \text{ K}$.



Para esta primera etapa se tiene que:

La variación en la entropía del sistema está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_I = mC_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = mC_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_I = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{500}{300} \right) = 3.19 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f} (alred)_I = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-mC_V(T_f - T_i)}{T_{alm}} ; \text{ esto es}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f} (alred)_I = \frac{-(2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (500 - 300) \text{ K}}{500 \text{ K}} = -2.50 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía del universo $\Delta S_{i \rightarrow f} (univ)_I = \Delta S_{i \rightarrow f} (sist)_I + \Delta S_{i \rightarrow f} (alred)_I$ es:

$$\Delta S_{i \rightarrow f} (univ)_I = (3.19 - 2.50) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.69 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Etapa II

La segunda etapa consiste en: estando ahora el sistema a la temperatura inicial de 500 K , se pone en contacto térmico con otro almacén cuya temperatura es $T_{alm} = 900 \text{ K}$; por lo que al llegar al equilibrio térmico con este almacén, la temperatura final del sistema será $T_f = 900 \text{ K}$.



Para esta segunda etapa se tiene que:

La variación en la entropía del sistema está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f} (sist)_{II} = mC_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = mC_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f} (sist)_{II} = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{900}{500} \right) = 3.67 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{II} = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-mC_V(T_f - T_i)}{T_{alm}}; \text{ esto es que:}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{II} = \frac{-(2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (900 - 500) \text{ K}}{900 \text{ K}} = -2.77 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía del universo $\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_{II} = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_{II} + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{II}$ es:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_{II} = (3.67 - 2.77) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.90 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Para la Forma B de variar la temperatura del sistema resulta que el cambio total en la entropía del sistema, de los alrededores y del universo es la suma de las variaciones parciales calculadas en las etapas I y II; esto es:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_I + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_{II} = (3.19 + 3.67) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 6.86 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_I + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{II} = (-2.50 - 2.77) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -5.27 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_I + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_{II} = (0.69 + 0.90) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 1.59 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$	Sistema	Alededores	Universo
Forma A	6.86	-4.16	2.70
Forma B	6.86	-5.27	1.59

De esta tabla se observa que independientemente de la forma de variar la temperatura del sistema, el cambio en la entropía de éste resulta ser igual para las formas A y B, dado que en ambos casos el estado inicial y el final del sistema es el mismo.

Problema 1.

3 kg de helio se hallan inicialmente a 300 K.

Pasan del estado 1 al 2, al ponerlos en contacto térmico (a volumen constante) con un almacén a 600 K hasta que llegan al equilibrio; mediante una expansión libre adiabática, pasan al estado 3 hasta triplicar su volumen; finalmente, en forma isoentrópica llegan al estado 4 hasta alcanzar la presión inicial.

Calcular las cantidades pedidas en la tabla.

	$\Delta S/\text{kJ.K}^{-1}$		
	Sistema	Alrededores	Universo
1			
2			
3			
4			
1 → 4			

Datos: $R = 2.08 \text{ kJ/kg.K}$, $C_V = 3.12 \text{ kJ/kg.K}$

Solución:

Paso 1.

El sistema pasa del estado inicial, caracterizado por: $(P_1, V_1, 300 \text{ K})$ al estado 2, al ponerse en contacto únicamente térmico con un almacén cuya temperatura es de 600 K, hasta que llegan al equilibrio; esto significa que:

$$a) \quad V_2 = V_1, \quad b) \quad T_{alm} = 600 \text{ K}, \quad c) \quad T_2 = T_{alm} = 600 \text{ K}$$

La variación en la entropía del sistema para el proceso $(1 \rightarrow 2)$ está dada como:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = mC_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + mR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = mC_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$d) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}} \right) \ln\left(\frac{600}{300}\right) = 6.49 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-mC_V(T_2 - T_1)}{T_{alm}}; \text{ esto es}$$

$$e) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) = \frac{-(3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 - 300) \text{ K}}{600 \text{ K}} = -4.68 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y la variación en la entropía del universo: $\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) + \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred})$ es:

$$f) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) = (6.49 - 4.68) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 1.81 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

El estado 2 del sistema queda caracterizado como: $(P_2, V_1, 600 \text{ K})$

Paso 2.

El sistema pasa del estado 2 al 3 mediante una expansión libre adiabática, triplicando su volumen; lo cual significa que: a) $T_3 = T_2 = 600 \text{ K}$, b) $\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred}) = 0$

La variación en la entropía del sistema para este proceso está dada como

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) = mC_V \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) + mR \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) = mR \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) = mR \ln \left(\frac{3V_1}{V_1} \right)$$

$$c) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) = (3 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln(3) = 6.86 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Para este proceso; $\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) = \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred})$

$$d) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) = (6.86 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 6.86 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

El estado 3 del sistema queda caracterizado como: $(P_3, 3V_1, 600 \text{ K})$

Paso 3.

El sistema pasa del estado 3 al 4 mediante un proceso isoentrópico hasta alcanzar la presión inicial; esto significa que:

$$a) \Delta S_{3 \rightarrow 4}(sist) = 0, \quad b) \Delta S_{3 \rightarrow 4}(univ) = 0, \quad c) \Delta S_{3 \rightarrow 4}(alred) = 0$$

Estando el estado final 4 caracterizado por: (P_1, V_4, T_4)

Paso 4.

Finalmente, sumando las correspondientes variaciones en la entropía del sistema, los alrededores y del universo. para cada uno de los tres procesos se obtiene la variación total en estas cantidades; esto es:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(sist) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(sist) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(sist) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(sist)$$

$$a) \Delta S_{1 \rightarrow 4}(sist) = (6.49 + 6.86 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 13.35 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(alred) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(alred) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(alred) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(alred)$$

$$b) \Delta S_{1 \rightarrow 4}(alred) = (-4.68 + 0 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -4.68 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(univ) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(univ) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(univ) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(univ)$$

$$c) \Delta S_{1 \rightarrow 4}(univ) = (1.81 + 6.86 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 8.67 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$\Delta S / \text{kJ} \cdot \text{K}^{-1}$			
	Sistema	Alrededores	Universo
1	1d 6.49	1e -4.68	1f 1.81
2	2c 6.86	2b 0	2d 6.86
3	3a 0	3e 0	3b 0
4	4a 13.35	4b -4.68	4c 8.67

Problema 2.

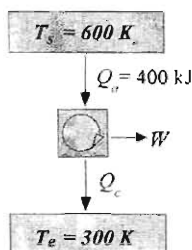
Un sistema efectúa un ciclo operando entre dos almacenes a las temperaturas de 600 K y 300 K , absorbiendo 400 kJ de calor del almacén a mayor temperatura. Suponiendo que la energía se conserva, determinar en cada uno de los casos siguientes si el ciclo es posible (reversible o irreversible) o imposible.

- a) El rendimiento del ciclo es de 15% _____,
- b) El sistema efectúa un trabajo neto de 350 kJ _____,
- c) El almacén a menor temperatura absorbe 200 kJ de calor _____.

Datos generales: $Q_a = 400\text{ kJ}$, $T_s = 600\text{ K}$, $T_e = 300\text{ K}$

Solución:

a)



Datos: $r = 15\% = 0.15$

De la definición de rendimiento: $r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}$; se tiene que: $\frac{Q_c}{Q_a} = 1 - r$, de donde:

$$Q_c = Q_a(1 - r) = (400\text{ kJ})(1 - 0.15) = 340\text{ kJ}$$

Dado que la energía se conserva, entonces $W = Q_a - Q_c = (400 - 340)\text{ kJ} = 60\text{ kJ}$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

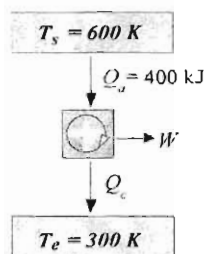
En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente. y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm\ T_s} + \Delta S_{alm\ T_e} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{400 \text{ kJ}}{600 \text{ K}} + \frac{340 \text{ kJ}}{300 \text{ K}} \right) = (-0.67 + 1.13) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.46 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como ΔS_{univ} es positiva, concluimos que el ciclo es: *possible irreversible*

b)



Datos: $W = 350 \text{ J}$

Dado que la energía se conserva, entonces $W = Q_a - Q_c$, de donde:

$$Q_c = Q_a - W = (400 - 350) \text{ kJ} = 50 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{ext}$

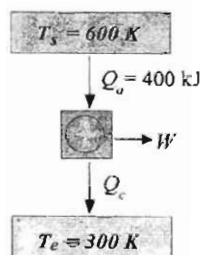
En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{ext} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alm T_e} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{400 \text{ kJ}}{600 \text{ K}} + \frac{50 \text{ kJ}}{300 \text{ K}} \right) = (-0.67 + 0.17) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -0.50 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como ΔS_{univ} es negativa, concluimos que el ciclo es: *impossible*

c)



Datos: $Q_c = 200\text{ kJ}$

Dado que la energía se conserva, entonces $W = Q_o - Q_c = (400 - 200)\text{ kJ} = 200\text{ kJ}$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm\ T_s} + \Delta S_{alm\ T_c} = -\frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_c}{T_c}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_c}{T_c}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{400\text{ kJ}}{600\text{ K}} + \frac{200\text{ kJ}}{300\text{ K}} \right) = (-0.67 + 0.67) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0$$

y como ΔS_{univ} es igual a cero, concluimos que el ciclo es: *posible reversible*

Problema 1.

Un sistema constituido por 5 kg de helio inicialmente a una temperatura de 400 K es sometido a los siguientes cambios:

Pasa del estado 1 al 2, al ponerlo en contacto térmico (a volumen constante) con un almacén a 700 K hasta alcanzar el equilibrio; a continuación regresa al estado inicial, al ponerlo en contacto térmico (a volumen constante) con otro almacén a la temperatura de 400 K.

Llenar la tabla, indicando en la última columna si el proceso es reversible, irreversible o imposible.

	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$			Tipo de Proceso
	Sistema	Alrededores	Universo	
1 \rightarrow 2				
2 \rightarrow 1				
1 \rightarrow 2 \rightarrow 1				

Datos: $m = 5 \text{ kg}$, $C_V = 3.12 \text{ kJ/kgK}$, $C_P = 5.20 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

El sistema pasa del estado inicial, caracterizado por: $(P_1, V_1, 400 \text{ K})$ al estado 2, al ponerse en contacto únicamente térmico con un almacén cuya temperatura es de 700 K, hasta que llegan al equilibrio; esto significa que,

$$a) \quad V_2 = V_1, \quad b) \quad T_{alm} = 700 \text{ K}, \quad c) \quad T_2 = T_{alm} = 700 \text{ K}$$

La variación en la entropía del sistema para el proceso (1 \rightarrow 2) está dada como:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = mC_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + mR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = mC_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$d) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = (5 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln\left(\frac{700}{400}\right) = 8.73 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-mC_V(T_2 - T_1)}{T_{alm}}; \text{ esto es}$$

$$e) \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) = \frac{-(5 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (700 - 400) \text{ K}}{700 \text{ K}} = -6.69 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y la variación en la entropía del universo: $\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) + \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred})$ es

$$f) \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) = (8.73 - 6.69) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 2.04 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

como $\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ})$ es positiva, concluimos que: g) el proceso (1→2) es *irreversible*

Paso 2.

Estando el sistema en el estado 2, caracterizado por $(P_2, V_1, 700 \text{ K})$, regresa al estado inicial 1, al ponerse en contacto únicamente térmico con otro almacén cuya temperatura es de 400 K , hasta que llegan al equilibrio; esto significa que:

$$a) V_1 = V_2, \quad b) T_{\text{alm}} = 400 \text{ K}, \quad c) T_1 = T_{\text{alm}} = 400 \text{ K}$$

La variación en la entropía del sistema para el proceso (2→1) está dada como:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{sist}) = mC_V \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) + mR \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = mC_V \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)$$

$$d) \Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{sist}) = (5 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{400}{700} \right) = -8.73 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{alred}) = \frac{Q_{\text{alm}}}{T_{\text{alm}}} = \frac{-Q_{\text{sist}}}{T_{\text{alm}}} = \frac{-\Delta U_{\text{sist}}}{T_{\text{alm}}} = \frac{-mC_V(T_1 - T_2)}{T_{\text{alm}}}; \text{ esto es}$$

$$e) \Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{alred}) = \frac{-(5 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (400 - 700) \text{ K}}{400 \text{ K}} = 11.70 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y la variación en la entropía del universo: $\Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{univ}) = \Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{sist}) + \Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{alred})$ es

$$f) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{univ}) = (-8.73 + 11.70) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 2.97 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como $\Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{univ})$ es positiva, concluimos que: g) el proceso $(2 \rightarrow 1)$ es *irreversible*

Paso 3.

Considerando a los dos procesos en conjunto resulta que:

$$a) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1}(\text{sist}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) + \Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{sist}) = (8.73 - 8.73) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0$$

$$b) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1}(\text{alred}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) + \Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{alred}) = (-6.69 + 11.70) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 5.01 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$c) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1}(\text{univ}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) + \Delta S_{2 \rightarrow 1}(\text{univ}) = (2.04 + 2.97) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 5.01 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como $\Delta S_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1}(\text{univ})$ es positiva, se concluye que

d) el proceso $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 1)$ es *irreversible*.

	AS/kJK ⁻¹				
	Sistema	Alrededores	Universo		Tipo de Proceso
1 → 2	1d 8.73	1e -6.69	1f 2.04	1g	irreversible
2 → 1	2d -8.73	2e 11.70	2f 2.97	2g	irreversible
1 → 2 → 1	3a 0	3b 5.01	3c 5.01	3d	irreversible

Problema 2.

Un sistema opera en ciclos entre dos almacenes a las temperaturas de 700 K y 300 K . Si el sistema realiza un trabajo neto de 250 kJ , determinar si el ciclo es posible (reversible o irreversible) o imposible en cada uno de los casos siguientes.

Suponer que en todos ellos se conserva la energía.

a) El rendimiento del ciclo es de 25%

_____.

b) El sistema absorbe 450 kJ de calor

_____.

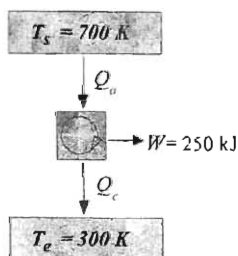
c) El sistema cede 150 kJ de calor

_____.

Datos generales: $W = 250\text{ kJ}$, $T_s = 700\text{ K}$, $T_e = 300\text{ K}$

Solución:

a)



Datos: $r = 25\% = 0.25$

De la definición de rendimiento: $r = \frac{W}{Q_a}$; se tiene que: $Q_a = \frac{W}{r} = \frac{250\text{ kJ}}{0.25} = 1000\text{ kJ}$

Dado que la energía se conserva, $W = Q_a - Q_c$; de donde:

$$Q_c = Q_a - W = (1000 - 250)\text{ kJ} = 750\text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{alm}} + \Delta S_{\text{alred}}$

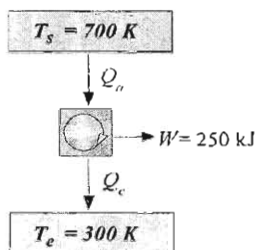
En donde $\Delta S_{\text{alm}} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{\text{alred}} = \Delta S_{\text{alm } T_s} + \Delta S_{\text{alm } T_e} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{\text{universo}} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{1000 \text{ kJ}}{700 \text{ K}} + \frac{750 \text{ kJ}}{300 \text{ K}} \right) = (-1.43 + 2.5) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 1.07 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

como ΔS_{univ} es positiva, concluimos que el ciclo es: *posible irreversible*

b)



Datos: $Q_a = 450 \text{ kJ}$

Dado que la energía se conserva, entonces $W = Q_a - Q_c$; de donde:

$$Q_c = Q_a - W = (450 - 250) \text{ kJ} = 200 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

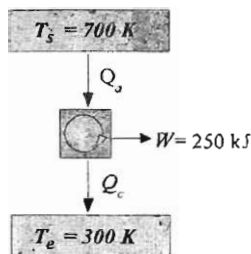
En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alm T_e} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{450 \text{ kJ}}{700 \text{ K}} + \frac{200 \text{ kJ}}{300 \text{ K}} \right) = (-0.64 + 0.67) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.03 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como ΔS_{univ} es positiva, concluimos que el ciclo es: *posible irreversible*

c)



Datos: $Q_e = 150 \text{ kJ}$

Dado que la energía se conserva, entonces $W = Q_o - Q_e$; de donde,

$$Q_o = W + Q_e = (250 + 150) \text{ kJ} = 400 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alrm T_e} = -\frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_e}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_e}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{400 \text{ kJ}}{700 \text{ K}} + \frac{150 \text{ kJ}}{300 \text{ K}} \right) = (-0.57 + 0.50) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -0.07 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

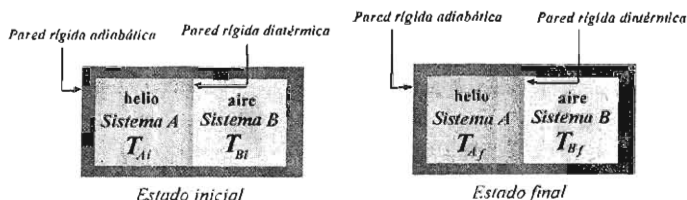
y como ΔS_{univ} es negativa, concluimos que el ciclo es: *imposible*

Problema 1.

Los sistemas A y B ilustrados se ponen en contacto térmico (a volumen constante) hasta que alcanzan el equilibrio.

El sistema A está constituido por 3 kg de helio a la temperatura inicial de 300 K. El sistema B consta de 2 kg de aire a la temperatura inicial de 400 K. Determinar:

a) La temperatura final, T_f común para los dos sistemas, b) la variación en la entropía de cada sistema. c) la variación en la entropía del sistema compuesto por A y B , e) en base a su respuesta en (d), indicar si el proceso es reversible, irreversible o imposible.



Datos: $m_A = 3$ kg, $T_{Ai} = 300$ K, $C_{VA} = 3.12$ kJ/kgK,

$m_B = 2$ kg, $T_{Bi} = 400$ K, $C_{VB} = 0.72$ kJ/kgK

Solución:

Paso 1.

La ley Cero establece que cuando dos sistemas interactúan térmicamente, en el estado final de equilibrio la temperatura de ambos sistemas es la misma. Para determinar esta temperatura final, $T_{Af} = T_{Bf} = T_f$, de equilibrio procedemos de la siguiente manera:

Dado que los sistemas A y B están confinados en un recipiente de paredes rígidas adiabáticas, entonces no tienen interacción mecánica ni térmica con los alrededores, por

lo que, $\Delta U = (\Delta U_A + \Delta U_B) = Q - W = 0$; de donde $\Delta U_A = -\Delta U_B$, es decir,

$m_A C_{VA} (T_f - T_{Ai}) = -m_B C_{VB} (T_f - T_{Bi})$; esto es

$$T_f (m_A C_{VA} + m_B C_{VB}) = m_A C_{VA} T_{Ai} + m_B C_{VB} T_{Bi}, \text{ de donde: } T_f = \frac{m_A C_{VA} T_{Ai} + m_B C_{VB} T_{Bi}}{m_A C_{VA} + m_B C_{VB}}$$

$$a) T_f = \frac{[(3)(3.12)(300) + (2)(0.72)(400)] \left(\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (K)}{[(3)(3.12) + (2)(0.72)] \left(\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)} = 313.33 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 313.33 \text{ K}$$

Paso 2.

La variación en la entropía para el sistema A está dada como

$$\Delta S_A = m_A C_{VA} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Ai}} \right) + m_A R_A \ln \left(\frac{V_{Af}}{V_{Ai}} \right) = m_A C_{VA} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Ai}} \right)$$

$$b) \quad \Delta S_A = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{313.33}{300} \right) = 0.41 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y para el sistema B :

$$\Delta S_B = m_B C_{VB} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Bi}} \right) + m_B R_B \ln \left(\frac{V_{Bf}}{V_{Bi}} \right) = m_B C_{VB} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Bi}} \right)$$

$$c) \quad \Delta S_B = (2 \text{ kg}) \left(0.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{313.33}{400} \right) = -0.35 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 3.

La variación en la entropía para el sistema compuesto por A y B está dada como:

$$d) \quad \Delta S_{(A+B)} = \Delta S_A + \Delta S_B = (0.41 - 0.35) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.06 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que los sistemas A y B no tienen interacción mecánica ni térmica con los alrededores, entonces, $\Delta S_{(alred)} = 0$

Paso 4.

La variación en la entropía del universo es

$$e) \quad \Delta S_{(univ)} = \Delta S_{(A+B)} + \Delta S_{(alred)} = (0.06 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.06 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 5.

Como la variación en la entropía del universo es una cantidad positiva, concluimos que este proceso de intercambio de energía calorífica solo entre los sistemas A y B es representativa de un *f) proceso irreversible*

Problema 2.

Un sistema efectúa un ciclo operando entre almacenes térmicos a las temperaturas de 700 K y 315 K . Suponiendo que la energía se conserva, indicar en cada uno de los casos siguientes, si el ciclo es posible (reversible o irreversible) o imposible.

a) El sistema absorbe 500 kJ de calor del almacén a temperatura mayor y realiza un ciclo con un rendimiento de 70% _____,

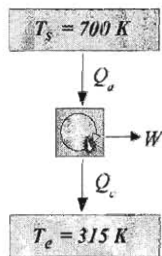
b) El sistema absorbe 180 kJ de calor del almacén a menor temperatura y cede cierta cantidad de calor al almacén a temperatura mayor. El trabajo necesario que debe suministrársele al sistema es de 220 kJ _____,

c) El sistema absorbe cierta cantidad de calor del almacén a temperatura mayor, realiza un trabajo neto de 200 kJ y cede 300 kJ de calor al almacén a temperatura baja _____.

Datos generales: $T_s = 700\text{ K}$, $T_e = 315\text{ K}$

Solución:

a)



Datos: $Q_a = 500\text{ kJ}$, $r = 70\% = 0.70$

De la definición de rendimiento: $r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}$; se tiene que: $\frac{Q_c}{Q_a} = 1 - r$, por lo que:

$$Q_c = Q_a(1 - r) = (500\text{ kJ})(1 - 0.70) = 150\text{ kJ}$$

Dado que la energía se conserva, $W = Q_a - Q_c = (500 - 150)\text{ kJ} = 350\text{ kJ}$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

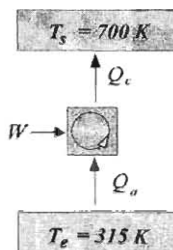
En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera ciclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alm T_e} = -\frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{500 \text{ kJ}}{700 \text{ K}} + \frac{150 \text{ kJ}}{315 \text{ K}} \right) = (-0.71 + 0.48) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -0.23 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como ΔS_{univ} es negativa, concluimos que el ciclo es: *imposible*

b)



Datos: $Q_o = 180 \text{ kJ}$, $W = 220 \text{ kJ}$

La Ley de conservación de la energía queda expresada como: $-W = Q_o - Q_c$; el trabajo es negativo porque ahora se está suministrando al sistema, entonces:

$$Q_c = Q_o + W = (180 + 220) \text{ kJ} = 400 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

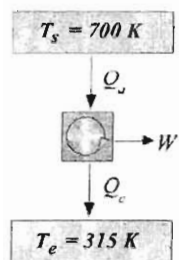
En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alm T_e} = \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_o}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 + \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_o}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(\frac{400 \text{ kJ}}{700 \text{ K}} - \frac{180 \text{ kJ}}{315 \text{ K}} \right) = (0.57 - 0.57) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0$$

Como ΔS_{univ} es igual a cero, concluimos que el ciclo es: *posible reversible*

c)



Datos: $W = 200 \text{ kJ}$, $Q_c = 300 \text{ kJ}$

Dado que la energía se conserva, entonces $W = Q_s - Q_c$; de donde:

$$Q_s = W + Q_c = (200 + 300) \text{ kJ} = 500 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{atrcd}$

En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alm T_c} = -\frac{Q_s}{T_s} + \frac{Q_c}{T_c}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_s}{T_s} + \frac{Q_c}{T_c}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{500 \text{ kJ}}{700 \text{ K}} + \frac{300 \text{ kJ}}{315 \text{ K}} \right) = (-0.71 + 0.95) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.24 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como ΔS_{univ} es positiva, concluimos que el ciclo es: *posible irreversible*

Problema 1.

Un sistema efectúa un ciclo operando entre almacenes térmicos a las temperaturas de 1200 K y 720 K . Considerando que la energía se conserva, llenar la tabla, en cada uno de los casos siguientes, indicando si el ciclo es posible (reversible o irreversible) o imposible.

a) El sistema opera como una máquina térmica de Carnot y cede 600 kJ de calor al almacén a la temperatura inferior.

Q_a	$\frac{\text{kJ}}{Q_c}$	W	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$				$r\ (%)$	Ciclo
			sist	alm sup	alm inf	univ		

b) El sistema opera como una máquina térmica y el almacén a la temperatura superior cede 600 kJ de calor.

Q_a	$\frac{\text{kJ}}{Q_c}$	W	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$				$r\ (%)$	Ciclo
			sist	alm sup	alm inf	univ		

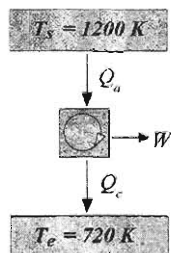
c) El sistema opera como una máquina térmica, cediendo el almacén a la temperatura superior 600 kJ de calor y el almacén a la temperatura inferior absorbe 450 kJ de calor.

Q_a	$\frac{\text{kJ}}{Q_c}$	W	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$				$r\ (%)$	Ciclo
			sist	alm sup	alm inf	univ		

Datos generales: $T_s = 1200\text{ K}$, $T_e = 720\text{ K}$

Solución:

a)



Datos: $Q_c = 600\text{ kJ}$, $r = r_{\max} = r_C$

Como la máquina opera como una de Carnot, entonces el rendimiento es máximo, mismo que está dado como:

$$r_c = 1 - \frac{T_c}{T_s} = 1 - \frac{(720 \text{ K})}{(1200 \text{ K})} = 0.40 = 40\%$$

De la definición de rendimiento: $r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}$; se tiene que: $\frac{Q_c}{Q_a} = 1 - r$, por lo que:

$$Q_a = \frac{Q_c}{(1-r)} = \frac{(600 \text{ kJ})}{(1-0.4)} = 1000 \text{ kJ}$$

Dado que la energía se conserva, $W = Q_a - Q_c = (1000 - 600) \text{ kJ} = 400 \text{ kJ}$

$\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alm \text{ sup}} = -\frac{Q_a}{T_s} = -\frac{1000 \text{ kJ}}{1200 \text{ K}} = -0.83 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{alm \text{ inf}} = \frac{Q_c}{T_c} = \frac{600 \text{ kJ}}{720 \text{ K}} = 0.83 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

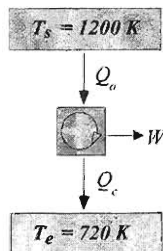
$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{atred} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alm \text{ sup}} + \Delta S_{alm \text{ inf}}$$

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alm \text{ sup}} + \Delta S_{alm \text{ inf}} = (0 - 0.83 + 0.83) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0$$

Dado que $\Delta S_{univ} = 0$, entonces la máquina térmica realiza un ciclo: *posible reversible*

kJ			$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$				r (%)	Ciclo
Q_a	Q_c	W	<i>sist</i>	<i>alm sup</i>	<i>alm inf</i>	<i>univ</i>		
1000	600	400	0	-0.83	0.83	0	40	<i>posible reversible</i>

b)



Datos: $Q_a = 600 \text{ kJ}$, $r = 60\% = 0.60$

De la definición de rendimiento: $r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}$; se tiene que: $\frac{Q_c}{Q_a} = 1 - r$, por lo que:

$$Q_c = Q_a(1 - r) = (600 \text{ kJ})(1 - 0.6) = 240 \text{ kJ}$$

Dado que la energía se conserva, $W = Q_a - Q_c = (600 - 240) \text{ kJ} = 360 \text{ kJ}$

$\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera ciclicamente, y

$$\Delta S_{alm sup} = -\frac{Q_a}{T_s} = -\frac{600 \text{ kJ}}{1200 \text{ K}} = -0.5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{alm inf} = \frac{Q_c}{T_v} = \frac{240 \text{ kJ}}{720 \text{ K}} = 0.33 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

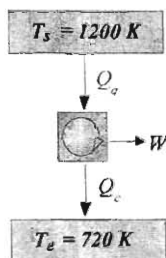
$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alm} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alm sup} + \Delta S_{alm inf}$$

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alm sup} + \Delta S_{alm inf} = (0 - 0.50 + 0.33) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -0.17 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que ΔS_{univ} es negativa y además $r > r_c$ concluimos que el ciclo es: *imposible*

Q_a	Q_c	W	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$	r (%)	Ciclo
600	240	360	$\begin{matrix} sist & alm sup & alm inf & univ \\ 0 & -0.5 & 0.33 & -0.17 \end{matrix}$	60	imposible

c)



Datos: $Q_a = 600 \text{ kJ}$, $Q_c = 450 \text{ kJ}$

El rendimiento para esta máquina térmica está dado como:

$$r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{450 \text{ kJ}}{600 \text{ kJ}} = 0.25 = 25\%$$

Dado que la energía se conserva, $W = Q_a - Q_c = (600 - 450) \text{ kJ} = 150 \text{ kJ}$

$\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera ciclicamente, y

$$\Delta S_{alm sup} = -\frac{Q_a}{T_s} = -\frac{600 \text{ kJ}}{1200 \text{ K}} = -0.5 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{alm inf} = \frac{Q_c}{T_c} = \frac{450 \text{ kJ}}{720 \text{ K}} = 0.625 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alm sup} + \Delta S_{alm inf}$$

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alm sup} + \Delta S_{alm inf} = (0 - 0.50 + 0.625) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.125 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que ΔS_{univ} es positiva concluimos que el ciclo es: *posible irreversible*

Q_a	Q_c	W	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$				r (%)	Ciclo
			sist	alm sup	alm inf	univ		
600	450	150	0	-0.50	0.625	0.125	25	posible irreversible

Problema 2.

Un sistema efectúa un ciclo operando entre dos almacenes térmicos a las temperaturas de 450 K y 300 K .

Suponiendo que la energía se conserva, indicar en cada uno de los casos siguientes, si el ciclo es posible (reversible o irreversible) o imposible.

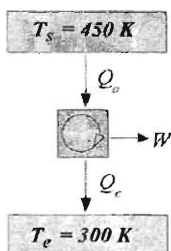
a) El sistema absorbe 300 kJ de calor del almacén a 450 K y efectúa un trabajo neto de 100 kJ _____,

b) El sistema absorbe 300 kJ de calor del almacén a 300 K y cede una determinada cantidad de calor al almacén a 450 K . El trabajo neto que debe suministrársele al sistema es de 450 kJ _____.

Datos generales: $T_s = 450\text{ K}$, $T_e = 300\text{ K}$

Solución:

a)



Datos: $Q_o = 300\text{ kJ}$, $W = 100\text{ kJ}$

Dado que la energía se conserva, entonces $W = Q_o - Q_c$; de donde:

$$Q_c = Q_o - W = (300 + 100)\text{ kJ} = 200\text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

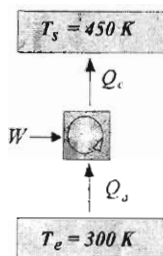
En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm\ T_s} + \Delta S_{alm\ T_e} = -\frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{300\text{ kJ}}{450\text{ K}} + \frac{200\text{ kJ}}{300\text{ K}} \right) = (-0.67 + 0.67) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0$$

y como ΔS_{univ} es igual a cero, concluimos que el ciclo es: *posible reversible*

b)



Datos: $Q_a = 300 \text{ kJ}$, $W = 450 \text{ kJ}$

La Ley de conservación de la energía queda expresada como: $-W = Q_a - Q_c$; el trabajo es negativo porque ahora se está suministrando al sistema, entonces,

$$Q_c = Q_a + W = (300 + 450) \text{ kJ} = 750 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alred T_s} + \Delta S_{alred T_e} = \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_a}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 + \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_a}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(\frac{750 \text{ kJ}}{450 \text{ K}} - \frac{300 \text{ kJ}}{300 \text{ K}} \right) = (1.67 - 1.0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.67 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que ΔS_{univ} es positiva, concluimos que el ciclo es: *posible irreversible*

Problema 1.

Se desea variar la temperatura de un sistema constituido por 2 kg de helio desde una temperatura inicial de 450 K hasta una temperatura final de 500 K, lo cual puede lograrse mediante dos formas alternas:

La primera (Figura 1) consiste en poner al sistema en contacto térmico (a volumen constante) con un almacén a temperatura de 500 K, hasta que ambos llegan al equilibrio. La segunda (Figura 2) consiste en poner al sistema en contacto térmico con otro sistema que consta de 1 kg de helio a la temperatura inicial de 600 K, hasta que ambos alcanzan el equilibrio. Indicar mediante cálculos de entropía ¿cuál de las dos formas de variar la temperatura del sistema se desvía más de un proceso reversible?

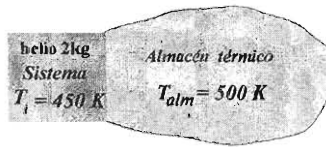


Figura 1

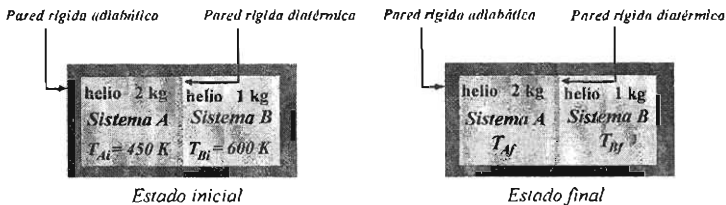


Figura 2

Para saber cual de las dos formas de variar la temperatura del sistema se desvía más de un proceso reversible, debemos calcular la variación en la entropía del universo para cada una de ellas y ver cual está más alejada del valor cero que es el que caracteriza a un proceso reversible.

Forma 1

Datos: $m = 2\text{ kg}$, $C_V = 3.12\text{ kJ/kgK}$

Solución:

Dado que el sistema interactúa únicamente en forma térmica con los alrededores, su volumen permanece constante. La Ley Cero de la Termodinámica establece que cuando dos sistemas llegan al equilibrio térmico deben tener el mismo valor de temperatura; y como el almacén térmico se caracteriza por mantener su temperatura, T_{alm} constante, entonces la temperatura final, T_f del sistema debe coincidir con la del almacén, $T_f = T_{alm} = 500\text{ K}$.

La variación en la entropía del sistema está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) = mC_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + mR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = mC_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{500}{450} \right) = 0.66 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada por la ecuación

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-m C_V (T_f - T_i)}{T_{alm}}; \text{ esto es que:}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \frac{-(2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (500 - 450) \text{ K}}{500 \text{ K}} = -0.62 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía del universo: $\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})$ es:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = (0.66 - 0.62) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.04 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como la variación en la entropía del universo es positiva, entonces el primer proceso analizado es *irreversible*.

Forma 2

Datos: $m_A = 2 \text{ kg}$, $m_B = 1 \text{ kg}$, $T_{Ai} = 450 \text{ K}$, $T_{Bi} = 600 \text{ K}$, $C_V = 3.12 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

De acuerdo con la Ley Cero de la Termodinámica, cuando el sistema considerado, A y el sistema B alcancen al equilibrio, su temperatura final debe ser la misma. Para determinar esta temperatura final, T_f , de equilibrio procedemos de la siguiente manera:

Dado que los sistemas A y B están confinados en un recipiente de paredes rígidas adiabáticas, entonces no tienen interacción mecánica ni térmica con los alrededores, por lo que: $\Delta U = (\Delta U_A + \Delta U_B) = Q - W = 0$; de donde $\Delta U_A = -\Delta U_B$, es decir que

$$m_A C_{VA} (T_f - T_{Ai}) = -m_B C_{VB} (T_f - T_{Bi}); \text{ esto es que:}$$

$$T_f (m_A C_{VA} + m_B C_{VB}) = m_A C_{VA} T_{Ai} + m_B C_{VB} T_{Bi}, \text{ de donde: } T_f = \frac{m_A C_{VA} T_{Ai} + m_B C_{VB} T_{Bi}}{m_A C_{VA} + m_B C_{VB}}$$

pero como el gas es helio para ambos sistemas, entonces $C_{VA} = C_{VB} = C_V$, resulta que:

$$T_f = \frac{m_A T_{Ai} + m_B T_{Bi}}{m_A + m_B} = \frac{[(2)(450) + (1)(600)] \text{ (kg)(K)}}{(2+1) \text{ kg}} = 500 \text{ K}$$

Como la pared que separa a los sistemas A y B es rígida diatérmica, el volumen respectivo de cada gas permanece constante.

La variación en la entropía para el sistema A está dada como:

$$\Delta S_A = m_A C_{V_A} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Ai}} \right) + m_A R_A \ln \left(\frac{V_{Af}}{V_{Ai}} \right) = m_A C_{V_A} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Ai}} \right)$$

$$\Delta S_A = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{500}{450} \right) = 0.66 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y para el sistema B :

$$\Delta S_B = m_B C_{V_B} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Bi}} \right) + m_B R_B \ln \left(\frac{V_{Bf}}{V_{Bi}} \right) = m_B C_{V_B} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Bi}} \right);$$

$$\Delta S_B = (1 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{500}{600} \right) = -0.57 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía para el sistema compuesto por A y B está dada como:

$$\Delta S_{(A+B)} = \Delta S_A + \Delta S_B = (0.66 - 0.57) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.09 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que los sistemas A y B no tienen interacción mecánica ni térmica con los alrededores, entonces: $\Delta S_{(alred)} = 0$

y la variación en la entropía del universo está dada como:

$$\Delta S_{(univ)} = \Delta S_{(A+B)} + \Delta S_{(alred)} = (0.09 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.09 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

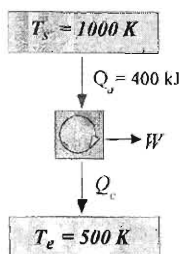
Como la variación en la entropía del universo es una cantidad positiva, concluimos que esta segunda forma de variar la temperatura del sistema es un proceso irreversible.

Finalmente, dado que $\Delta S(univ)_{FORMA 1} < \Delta S(univ)_{FORMA 2}$ concluimos que la *Forma 2* de variar la temperatura del sistema se desvía más de un proceso reversible.

Problema 2.

En la figura se muestra una máquina térmica que produce un trabajo W .

- Calcular cuál es la mínima cantidad de calor que puede cederse al almacén inferior.
- Si la máquina funciona con un rendimiento de 60 % y produce el mismo trabajo del inciso anterior, determinar si el proceso es posible (reversible o irreversible) o imposible.
- Si el calor cedido es de 300 kJ, calcular el rendimiento de la máquina y determinar si el proceso es posible (reversible o irreversible) o imposible.



Solución:

La mínima cantidad de calor que puede cederse al almacén inferior se obtiene cuando la máquina opera en forma posible reversible, esto es como una máquina térmica de Carnot para lo cual opera con el rendimiento máximo, mismo que está dado como:

$$r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{T_c}{T_s} = 1 - \frac{500}{1000} = 0.5; \text{ por lo que: } \frac{Q_c}{Q_a} = 1 - r; \text{ de donde:}$$

$$a) \quad Q_c = Q_a (1 - r) = (400\text{ kJ})(1 - 0.5) = 200\text{ kJ} = (Q_c)_{\min}$$

$$\text{y de la Ley de Conservación de la energía: } W = Q_a - Q_c = (400 - 200)\text{ kJ} = 200\text{ kJ}$$

$$b) \text{ Si } r = 60\% = 0.6 \text{ y } W = 200\text{ kJ}$$

$$\text{De la definición de rendimiento: } r = \frac{W}{Q_a} = 0.6;$$

$$\text{resulta que: } Q_a = \frac{W}{r} = \frac{200\text{ kJ}}{0.6} = 333.33\text{ kJ}$$

$$\text{y de la Ley de Conservación de la Energía: } W = Q_a - Q_c, \text{ se tiene que:}$$

$$Q_c = Q_o - W = (333.33 - 200) \text{ kJ} = 133.33 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alm T_e} = -\frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{333.33 \text{ kJ}}{1000 \text{ K}} + \frac{133.33 \text{ kJ}}{500 \text{ K}} \right) = (-0.33 + 0.27) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -0.06 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como ΔS_{univ} es negativa, concluimos que el ciclo es: *imposible*

Se llega a esta conclusión, comparando el rendimiento de 60% con el rendimiento máximo que es de 50%

c) Si $Q_c = 300 \text{ kJ}$ y $Q_o = 400 \text{ kJ}$

De la Ley de Conservación de la energía: $W = Q_o - Q_c = (400 - 300) \text{ kJ} = 100 \text{ kJ}$

$$\text{Aplicando la definición de rendimiento: } r = 1 - \frac{Q_c}{Q_o} = 1 - \frac{300}{400} = 0.25 = 25\%$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alm T_e} = -\frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_o}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{400 \text{ kJ}}{1000 \text{ K}} + \frac{300 \text{ kJ}}{500 \text{ K}} \right) = (-0.40 + 0.60) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.20 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como ΔS_{univ} es positiva, concluimos que el ciclo es: *posible irreversible*

Problema 1.

Un sistema que consta de 3 kg de helio experimenta sucesivamente los cambios siguientes: Una compresión isotérmica, aumentando su presión al doble de la presión inicial; una expansión libre adiabática, triplicando su volumen; finalmente, se pone en contacto térmico (a volumen constante) con un almacén cuya temperatura es tres veces mayor que la temperatura inicial del sistema, hasta que ambos llegan al equilibrio.

Llenar la tabla indicando en la última columna si el proceso es reversible o irreversible.

$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$			
	Sistema	Alrededores	Universo
1			0
2			
3			
4			
1 → 4			

Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$, $C_p = 5.20 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

El sistema pasa del estado inicial, caracterizado por: (P_1, V_1, T_1) al estado 2, mediante una compresión isotérmica en la que su presión aumenta al doble de la presión inicial; todo esto significa que:

$$a) \quad T_2 = T_1, \quad b) \quad P_2 = 2P_1$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos,

$$c) \quad V_2 = \frac{mRT_2}{P_2} = \frac{mRT_1}{2P_1} = \frac{1}{2} \frac{mRT_1}{P_1} = \frac{V_1}{2}$$

$$\text{El estado 2 queda caracterizado como: } (P_2, V_2, T_2) = \left(2P_1, \frac{V_1}{2}, T_1 \right)$$

La variación en la entropía del sistema para el proceso (1 → 2) está dada como:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = mC_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - mR \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -mR \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -mR \ln\left(\frac{2P_1}{P_1}\right)$$

$$d) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = -mR \ln(2) = -(3 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln(2) = -4.33 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Se conoce que $\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) = 0 = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) + \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred})$; de donde:

$$e) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) = -\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = -\left(-4.33 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}\right) = 4.33 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que la variación en la entropía del universo es igual a cero, concluimos que

f) el proceso (1→2) es reversible

Paso 2.

El sistema llega al estado 3 mediante una expansión libre adiabática, triplicando su volumen; lo cual significa que: a) $T_3 = T_2 = T_1$, b) $\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred}) = 0$,

$$c) \quad V_3 = 3V_2 = 3\left(\frac{V_1}{2}\right) = \frac{3V_1}{2}$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos,

$$d) \quad P_3 = \frac{mRT_3}{V_3} = \frac{mRT_1}{\frac{3V_1}{2}} = \frac{2}{3} \frac{mRT_1}{V_1} = \frac{2P_1}{3}$$

El estado 2 queda caracterizado como: $(P_3, V_3, T_3) = \left(\frac{2P_1}{3}, \frac{3V_1}{2}, T_1\right)$

La variación en la entropía del sistema para este proceso está dada como:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) = mC_v \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + mR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = mR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = mR \ln\left(\frac{3V_2}{V_2}\right) = mR \ln(3)$$

$$e) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) = (3 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right) \ln(3) = 6.86 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Para este proceso; $\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) = \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred})$

$$f) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) = (6.86 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 6.86 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que la variación en la entropía del universo es una cantidad positiva, concluimos que

g) el proceso (2→3) es irreversible

Paso 3.

El sistema pasa del estado 3 al estado 4, al ponerse en contacto únicamente térmico con un almacén, cuya temperatura es tres veces mayor que la temperatura inicial del sistema, hasta que llegan al equilibrio; esto significa que:

$$a) \quad V_4 = V_3 = \frac{3V_1}{2}, \quad b) \quad T_{alm} = 3T_1, \quad c) \quad T_4 = T_{alm} = 3T_1$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ se obtiene

$$d) \quad P_4 = \frac{mRT_4}{V_4} = \frac{mR(3T_1)}{V_3} = \frac{mR(3T_1)}{\frac{3V_1}{2}} = \frac{6mRT_1}{3V_1} = 2 \left(\frac{mRT_1}{V_1} \right) = 2P_1$$

El estado 4 queda caracterizado como: $(P_4, V_4, T_4) = \left(2P_1, \frac{3V_1}{2}, 3T_1 \right)$

De la relación: $C_p = C_v + R$, se tiene que $C_v = C_p - R = 3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

La variación en la entropía del sistema para el proceso (3→4) está dada como:

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) = mC_v \ln \left(\frac{T_4}{T_3} \right) + mR \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right) = mC_v \ln \left(\frac{T_4}{T_3} \right) = mC_v \ln \left(\frac{3T_1}{T_1} \right) = mC_v \ln(3)$$

$$e) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln(3) = 10.28 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred}) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-mC_v(T_4 - T_3)}{T_{alm}}; \text{ esto es que:}$$

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred}) = \frac{-mC_v(T_4 - T_3)}{T_{alm}} = \frac{-mC_v(3T_1 - T_1)}{3T_1} = \frac{-2mC_v}{3}$$

$$f) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred}) = \frac{-2(3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)}{3} = -6.24 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y la variación en la entropía del universo: $\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{univ}) = \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred})$

resulta ser

$$g) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{univ}) = (10.28 - 6.24) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 4.04 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que la variación en la entropía del universo una cantidad positiva, concluimos que

h) el proceso (3→4) es irreversible.

Paso 4.

Finalmente, sumando las correspondientes variaciones en la entropía del sistema, los alrededores y del universo, para cada uno de los tres procesos se obtiene la variación total en estas cantidades; esto es:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{sist}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist})$$

$$a) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{sist}) = (-4.33 + 6.86 + 10.28) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 12.81 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{alred}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred})$$

$$b) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{alred}) = (4.33 + 0 - 6.24) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -1.91 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{univ}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{univ})$$

$$c) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{univ}) = (0 + 6.86 + 4.04) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 10.90 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$				
	Sistema	Alrededores	Universo	Tipo de Proceso
1	1c -4.33	1e 4.33	0	1f reversible
2	2e 6.86	2b 0	2f 6.86	2g irreversible
3	3e 10.28	3f -6.24	3g 4.04	3h irreversible
4				
1→4	4a 12.81	4b -1.91	4c 10.90	

Problema 2.

Una máquina térmica opera entre dos almacenes térmicos a las temperaturas de 600 K y 300 K . Suponiendo que la energía se conserva:

- a) Determinar la mínima cantidad de calor que el sistema puede absorber del almacén a 600 K , si se sabe que el calor cedido al almacén a menor temperatura es de 300 kJ _____.

Indicar para cada uno de los casos siguientes, si la máquina opera en forma posible (reversible o irreversible) o imposible:

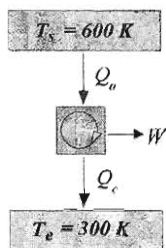
- b) El sistema absorbe 500 kJ de calor del almacén a 600 K y realiza un ciclo con un rendimiento de 60% _____.

- c) El sistema realiza un trabajo neto de 200 kJ y cede 400 kJ de calor al almacén a temperatura menor _____.

Datos generales: $T_s = 600\text{ K}$, $T_e = 300\text{ K}$

Solución:

a)



Datos: $Q_c = 300\text{ kJ}$

La mínima cantidad de calor que el sistema puede absorber del almacén a 600 K se obtiene cuando ésta opera en forma posible reversible; esto es cuando es una máquina térmica de Carnot y por lo tanto opera con el rendimiento máximo.

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

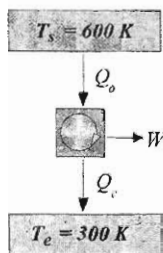
$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm\ T_s} + \Delta S_{alm\ T_e} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

Dado que la máquina opera en forma posible reversible, entonces $\Delta S_{univ} = 0$
 Esto es que

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{Q_a}{600\text{ K}} + \frac{300\text{ kJ}}{300\text{ K}} \right) = 0 ; \text{ de donde: } \frac{Q_a}{600\text{ K}} = \frac{300\text{ kJ}}{300\text{ K}} ; \text{ de aquí que:}$$

$$(Q_a)_{\min} = \frac{300\text{ kJ}}{300\text{ K}}(600\text{ K}) = 600\text{ kJ}$$

b)



Datos: $Q_a = 500\text{ kJ}$, $r = 60\% = 0.60$

De la definición de rendimiento: $r = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} = 0.6$; resulta que: $\frac{Q_c}{Q_a} = 1 - r$, de donde:

$$Q_c = Q_a(1 - r) = (500\text{ kJ})(1 - 0.6) = 200\text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

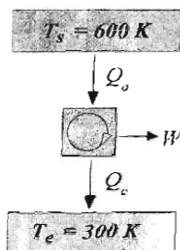
En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm\ T_s} + \Delta S_{alm\ T_e} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e} ; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{500\text{ kJ}}{600\text{ K}} + \frac{200\text{ kJ}}{300\text{ K}} \right) = (-0.83 + 0.67) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -0.16 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

como ΔS_{univ} es negativa, concluimos que la máquina térmica es: *imposible*

c)



Datos: $W = 200 \text{ kJ}$, $Q_c = 400 \text{ kJ}$

Dado que la energía se conserva, entonces $W = Q_a - Q_c$; por lo que

$$Q_a = Q_c + W = (200 + 400) \text{ kJ} = 600 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alm T_e} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e} ; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(-\frac{600 \text{ kJ}}{600 \text{ K}} + \frac{400 \text{ kJ}}{300 \text{ K}} \right) = (-1.0 + 1.33) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.33 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como ΔS_{univ} es positiva, concluimos que la máquina térmica opera en forma:

posible irreversible

Problema 1.

Un sistema constituido por 2 kg de aire es sujeto en forma independiente a dos procesos (es decir, cada proceso se realiza por separado estando el sistema en las mismas condiciones iniciales).

El primer proceso consiste en una expansión libre adiabática, hasta que la presión del sistema se reduce a la mitad.

El otro proceso consiste en poner al sistema en contacto térmico (a volumen constante) con un almacén cuya temperatura es tres veces mayor que la temperatura inicial del sistema, hasta que llegan al equilibrio.

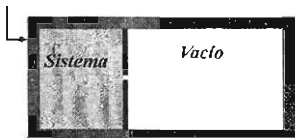
a) Determinar para cada proceso las variaciones en entropía del sistema, los alrededores y el universo; b) indicar si los procesos son reversibles o irreversibles; c) ¿en cuál de los procesos se produce la mínima variación en la entropía del universo?; d) ¿en cuál se produce la máxima variación en la entropía del sistema?; e) en función de su respuesta en (b), ¿cuál de los procesos se aleja más de uno reversible?; ¿por qué?

Datos: $m = 2 \text{ kg}$, $R = 0.287 \text{ kJ/kgK}$, $C_p = 1.004 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Primer proceso:

Pared rígida adiabática



Estado inicial

$$P_i, V_i, T_i$$



Estado final

$$P_f, V_f, T_i$$

El sistema se encuentra inicialmente en el estado caracterizado por (P_i, V_i, T_i) y se somete a una expansión libre adiabática hasta que su presión se reduce a la mitad; esto significa que: a) $T_f = T_i$, b) $\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = 0$, c) $P_f = \left(\frac{P_i}{2}\right)$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos,

$$d) \quad V_f = \frac{mRT_f}{P_f} = \frac{mRT_i}{\frac{P_i}{2}} = \frac{2mRT_i}{P_i} = 2 \left(\frac{mRT_i}{P_i} \right) = 2V_i$$

El estado final queda caracterizado como: $(P_f, V_f, T_f) = \left(\frac{P_i}{2}, 2V_i, T_i \right)$

La variación en la entropía del sistema para este proceso está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f} (sist) = mC_p \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - mR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) = -mR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) = -mR \ln \left(\frac{\frac{P_i}{2}}{P_i} \right) = -mR \ln \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$e) \Delta S_{i \rightarrow f} (sist) = -(2 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{1}{2} \right) = 0.398 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\text{Para este proceso; } \Delta S_{i \rightarrow f} (univ) = \Delta S_{i \rightarrow f} (sist) + \Delta S_{i \rightarrow f} (alred)$$

$$f) \Delta S_{i \rightarrow f} (univ) = (0.398 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.398 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que la variación en la entropía del universo es una cantidad positiva, concluimos que este proceso es irreversible.

Segundo proceso:



El sistema se encuentra inicialmente en el estado caracterizado por (P_i, V_i, T_i) y se pone en contacto, únicamente térmico, con una almacén hasta que llegan al equilibrio.

La Ley Cero de la Termodinámica establece que cuando dos sistemas llegan al equilibrio térmico deben tener el mismo valor de temperatura; y como el almacén se caracteriza por mantener su temperatura, T_{alm} constante, entonces la temperatura final, T_f del sistema debe coincidir con la del almacén; esto es: a) $T_f = T_{alm} = 3T_i$,

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ resulta que

$$b) P_f = \frac{mRT_f}{V_f} = \frac{mR(3T_i)}{V_i} = 3 \left(\frac{mRT_i}{V_i} \right) = 3P_i$$

El estado final queda caracterizado como: $(P_f, V_f, T_f) = (3P_i, V_i, 3T_i)$

De la relación: $C_p = C_v + R$, obtenemos: $C_v = C_p - R = 0.717 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$

La variación en la entropía del sistema está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) = m C_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + m R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = m C_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) = m C_v \ln \left(\frac{3T_i}{T_i} \right)$$

$$c) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) = m C_v \ln(3) = (2 \text{ kg}) \left(0.717 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln(3) = 1.575 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \frac{Q_{\text{alm}}}{T_{\text{alm}}} = \frac{-Q_{\text{sist}}}{T_{\text{alm}}} = \frac{-\Delta U_{\text{sist}}}{T_{\text{alm}}} = \frac{-m C_v (T_f - T_i)}{T_{\text{alm}}} ; \text{ esto es que:}$$

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \frac{-m C_v (T_f - T_i)}{T_{\text{alm}}} = \frac{-m C_v (3T_i - T_i)}{3T_i} = \frac{-2m C_v T_i}{3T_i}$$

$$d) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \frac{-2m C_v}{3} = \frac{-2(2 \text{ kg}) \left(0.717 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)}{3} = -0.956 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía del universo: $\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})$ resulta ser:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = (1.575 - 0.956) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.619 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como la variación en la entropía del universo es positiva, entonces el segundo proceso es irreversible.

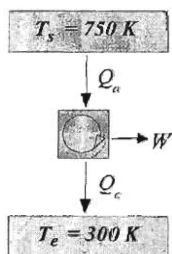
En base a los resultados obtenidos arriba, concluimos que:

- c) La mínima variación en la entropía del universo se produce en el primer proceso,
- d) En el segundo proceso se produce la máxima variación en la entropía del sistema
- e) El segundo proceso se aleja más de uno reversible dado que la variación en la entropía del universo para éste es mayor que la correspondiente para la expansión libre y adiabática.

Problema 2.

Para la máquina térmica ilustrada en la figura:

- Determinar el máximo rendimiento, b) determinar el valor del cociente Q_c/Q_a en el caso en que la máquina opere con el máximo rendimiento,
- Si $Q_c = 200$ kJ y la máquina opera como una de Carnot, determinar el valor de Q_a ,
- Si $W = 400$ kJ y $Q_a = 1000$ kJ, indicar, mediante cálculos de entropía si la máquina opera en forma posible (reversible o irreversible) o imposible.



Datos generales: $T_s = 750\text{ K}$, $T_e = 300\text{ K}$

Solución:

El rendimiento máximo está dado como:

$$a) \quad r_{\max} = 1 - \frac{T_e}{T_s} = 1 - \frac{300}{750} = 0.6 = 60\%$$

El máximo rendimiento se tiene cuando la máquina opera en forma posible reversible; esto es cuando la variación en la entropía del universo es igual a cero.

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{sist}} + \Delta S_{\text{alred}}$

En donde $\Delta S_{\text{sist}} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{\text{alred}} = \Delta S_{\text{alm } T_s} + \Delta S_{\text{alm } T_e} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{\text{univ}} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e}$$

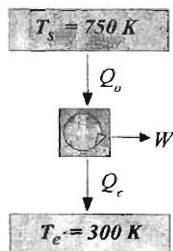
$$-\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_e} = 0; \text{ de donde: } \frac{Q_c}{T_e} = \frac{Q_a}{T_s}; \text{ por lo tanto:}$$

$$b) \quad \frac{Q_c}{Q_a} = \frac{T_e}{T_s} = \frac{300\text{ K}}{750\text{ K}} = 0.4$$

Cuando la máquina opera como una de Carnot, entonces el rendimiento es máximo y por lo tanto ésta opera en forma posible reversible; de aquí que si $Q_c = 200 \text{ kJ}$, el valor de Q_a se obtiene directamente del resultado del inciso (b), esto es: $\frac{Q_c}{Q_a} = 0.4$, de donde:

$$c) \quad Q_a = \frac{Q_c}{0.4} = \frac{200 \text{ kJ}}{0.4} = 500 \text{ kJ}$$

d)



Datos: $W = 400 \text{ kJ}$, $Q_a = 1000 \text{ kJ}$

Dado que la energía se conserva, entonces $W = Q_a - Q_c$; de donde:

$$Q_c = Q_a - W = (1000 - 400) \text{ kJ} = 600 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{sist}} + \Delta S_{\text{alred}}$

En donde $\Delta S_{\text{sist}} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{\text{alred}} = \Delta S_{\text{alm } T_s} + \Delta S_{\text{alm } T_c} = -\frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_c}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{\text{univ}} = 0 - \frac{Q_a}{T_s} + \frac{Q_c}{T_c}$$

$$\Delta S_{\text{univ}} = \left(-\frac{1000 \text{ kJ}}{750 \text{ K}} + \frac{600 \text{ kJ}}{300 \text{ K}} \right) = (-1.33 + 2.0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.67 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como ΔS_{univ} es positiva, concluimos que la máquina térmica opera en forma:

posible irreversible

Problema 1.

Un sistema que consta de 1 kg de hidrógeno experimenta los cambios que se describen a continuación:

1→2: expansión libre adiabática, triplicando su volumen;

2→3: compresión isobárica reversible, hasta adquirir el volumen inicial;

3→4: el sistema adquiere la temperatura inicial al ponerlo en contacto térmico (a volumen constante) con un almacén, hasta que ambos alcanzan el equilibrio.

a) Para cada uno de los procesos descritos, determine las variaciones en entropía del sistema, los alrededores y el universo; b) indique en cada caso si el proceso es reversible, irreversible o imposible; c) determine la variación total en la entropía del sistema.

Datos: $m = 1$ kg, $R = 4.124$ kJ/kgK, $C_V = 10.085$ kJ/kgK

Solución:

Paso 1.

El sistema se encuentra en el estado inicial (P_1, V_1, T_1) y pasa al estado 2, mediante una expansión libre adiabática en la que su volumen se triplica; esto significa que:

$$a) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) = 0, \quad b) \quad T_2 = T_1, \quad c) \quad V_2 = 3V_1$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos:

$$d) \quad P_2 = \frac{mRT_2}{V_2} = \frac{mRT_1}{3V_1} = \frac{1}{3} \frac{mRT_1}{V_1} = \frac{P_1}{3}$$

$$\text{El estado 2 queda caracterizado como: } (P_2, V_2, T_2) = \left(\frac{P_1}{3}, 3V_1, T_1 \right)$$

La variación en la entropía del sistema para el proceso (1→2) está dada como:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = mC_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + mR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = mR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = mR \ln \left(\frac{3V_1}{V_1} \right)$$

$$e) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = mR \ln(3) = (1 \text{ kg}) \left(4.124 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln(3) = 4.531 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que: $\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) + \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred})$; entonces:

$$f) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) = (4.531 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 4.531 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como que la variación en la entropía del universo es positiva, concluimos que
g) el proceso (1→2) es irreversible

Paso 2.

El sistema llega al estado 3 mediante una compresión isobárica reversible, hasta adquirir el volumen inicial; lo cual significa que:

$$a) \quad P_3 = P_2 = \frac{P_1}{3}, \quad b) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) = 0, \quad c) \quad V_3 = V_1$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$:

$$d) \quad T_3 = \frac{P_3 V_3}{mR} = \frac{\left(\frac{P_1}{3}\right) V_1}{mR} = \frac{1}{3} \left(\frac{P_1 V_1}{mR}\right) = \frac{T_1}{3}$$

$$\text{El estado 3 queda caracterizado como: } (P_3, V_3, T_3) = \left(\frac{P_1}{3}, V_1, \frac{T_1}{3}\right)$$

El valor numérico del calor específico a presión constante está dado como:

$$C_p = C_v + R = 14.209 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

La variación en la entropía del sistema para este proceso está dada como:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) = mC_p \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) - mR \ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right) = mC_p \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = mC_p \ln\left(\frac{\frac{T_1}{3}}{T_1}\right)$$

$$e) \quad \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) = mC_p \ln\left(\frac{1}{3}\right) = (1 \text{ kg}) \left(14.209 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right) \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -15.61 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como para este proceso; $\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) = \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred}) = 0$, entonces

$$f) \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred}) = -\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) = -(-15.61) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 15.61 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 3.

El sistema pasa del estado 3 al 4, al ponerse en contacto únicamente térmico con un almacén, hasta que al llegar al equilibrio, el sistema adquiere la temperatura inicial; esto significa que:

$$a) V_4 = V_3 = V_1, \quad b) T_4 = T_1, \quad c) T_{alm} = T_4 = T_1$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos

$$d) P_4 = \frac{mRT_4}{V_4} = \frac{mRT_1}{V_1} = P_1$$

El estado 4 queda caracterizado como: $(P_4, V_4, T_4) = (P_1, V_1, T_1)$

La variación en la entropía del sistema para el proceso $(3 \rightarrow 4)$ está dada como:

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) = mC_v \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) + mR \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = mC_v \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) = mC_v \ln\left(\frac{T_1}{T_3}\right)$$

$$e) \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) = mC_v \ln(3) = (1 \text{ kg}) \left(10.085 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln(3) = 11.079 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred}) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-mC_v(T_4 - T_3)}{T_{alm}}; \text{ esto es que:}$$

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4} (alred) = \frac{-mC_v (T_4 - T_3)}{T_{alm}} = \frac{-mC_v \left(T_1 - \frac{T_1}{3} \right)}{T_1} = \frac{-2mC_v}{3}$$

$$f) \Delta S_{3 \rightarrow 4} (alred) = \frac{-2(1 \text{ kg}) \left(10.085 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)}{3} = -6.72 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y la variación en la entropía del universo $\Delta S_{3 \rightarrow 4} (univ) = \Delta S_{3 \rightarrow 4} (sist) + \Delta S_{3 \rightarrow 4} (alred)$ resulta ser:

$$g) \Delta S_{3 \rightarrow 4} (univ) = (11.079 - 6.72) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 4.359 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que la variación en la entropía del universo una cantidad positiva, concluimos que

h) el proceso (3→4) es irreversible.

Paso 4.

Finalmente, dado que el sistema regresa a las condiciones originales, la variación total en la entropía del sistema resulta ser igual a cero.

A esta conclusión se llega también, sumando la correspondiente variación en la entropía del sistema, debida a cada uno de los tres procesos; esto es:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4} (sist) = \Delta S_{1 \rightarrow 2} (sist) = \Delta S_{1 \rightarrow 2} (sist) + \Delta S_{2 \rightarrow 3} (sist) + \Delta S_{3 \rightarrow 4} (sist)$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4} (sist) = (4.531 - 15.610 + 11.079) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0$$

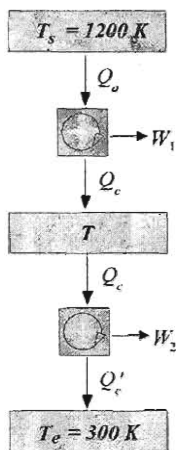
Problema 2.

La figura muestra dos máquinas de Carnot en serie. La máquina M_1 absorbe el calor Q_a de un almacén a la temperatura T_s y cede el calor Q_c a un almacén a la temperatura T . La máquina M_2 recibe el calor disipado por M_1 y cede el calor Q'_c a un almacén a la temperatura T_e .

Suponiendo que el rendimiento para ambas máquinas es el mismo, determinar:

a) La temperatura T del almacén intermedio, b) el rendimiento.

Si $Q_c = 350$ kJ, determinar: c) Q_a y d) W_1 .



Solución:

Como las máquinas son de Carnot, entonces operan con el rendimiento máximo; esto es

$$\text{que: } r_1 = 1 - \frac{T}{T_s} \quad \text{y} \quad r_2 = 1 - \frac{T_e}{T}$$

El rendimiento es el mismo, entonces: $1 - \frac{T}{T_s} = 1 - \frac{T_e}{T}$; por lo que: $\frac{T}{T_s} = \frac{T_e}{T}$

de donde: $T^2 = T_e T_s$; de aquí que la temperatura del almacén intermedio es:

$$a) \quad T = \sqrt{T_e T_s} = \sqrt{(300\text{ K})(1200\text{ K})} = 600\text{ K}$$

El valor numérico del rendimiento es:

$$b) \quad r_1 = 1 - \frac{T}{T_s} = 1 - \frac{600 \text{ K}}{1200 \text{ K}} = 0.5 = r_2 = 50\%$$

También se tiene que: $r_1 = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} = 0.5$;

por lo que: $\frac{Q_c}{Q_a} = 1 - r_1$,

de donde, c) $Q_a = \frac{Q_c}{1 - r_1} = \frac{350 \text{ kJ}}{1 - 0.5} = 700 \text{ kJ}$

Dado que la energía se conserva, entonces

d) $W_1 = Q_a - Q_c = (700 - 350) \text{ kJ} = 350 \text{ kJ}$

Problema 1.

Un sistema que consta de 2 kg de helio, inicialmente a 1040 kPa y 2 m³ experimenta los cambios que se describen a continuación:

1→2: expansión isobárica, duplicando su volumen;

2→3: el sistema adquiere la temperatura inicial al ponerlo en contacto térmico (a volumen constante) con un almacén, hasta que ambos llegan al equilibrio.

3→4: expansión libre adiabática, duplicando su volumen.

Llenar la tabla indicando en la última columna si el proceso es reversible o irreversible.

	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$			Tipo de Proceso
				Sistema	Alrededores	Universo	
1						0	
2							
3							
4							
1→4							

Datos: $m = 2 \text{ kg}$, $R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$, $C_p = 5.20 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Se conoce la presión y el volumen en el estado inicial, por lo que de la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos:

$$a) \quad T_1 = \frac{P_1 V_1}{mR} = \frac{\left(1040 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right) (2 \text{ m}^3)}{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)} = 500 \frac{\text{kJ}}{\text{kJ}} = 500 \text{ K}$$

El sistema pasa del estado 1 al estado 2 mediante una expansión isobárica duplicando su volumen; esto significa que: b) $P_2 = P_1 = 1040 \text{ kPa}$, c) $V_2 = 2V_1 = 4 \text{ m}^3$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ se tiene que:

$$d) \quad T_2 = \frac{P_2 V_2}{mR} = \frac{\left(1040 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right) (4 \text{ m}^3)}{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)} = 1000 \frac{\text{kJ}}{\text{kJ}} = 1000 \text{ K}$$

La variación en la entropía del sistema para este proceso está dada como:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = mC_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - mR \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = mC_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$e) \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = (2 \text{ kg}) \left(5.20 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln\left(\frac{1000}{500}\right) = 7.21 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Se conoce para este proceso que: $\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) + \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) = 0$, así que:

$$f) \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) = -\Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) = -\left(7.21 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} \right) = -7.21 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como la variación en la entropía del universo es igual a cero, entonces:

g) el proceso (1→2) es reversible

Paso 2.

El sistema pasa del estado 2 al 3, adquiriendo la temperatura inicial, al ponerlo en contacto únicamente térmico con un almacén hasta que alcanzan el equilibrio; lo cual significa que:

$$a) V_3 = V_2 = 4 \text{ m}^3, \quad b) T_3 = T_1 = 500 \text{ K}, \quad c) T_{alm} = T_3 = T_1 = 500 \text{ K}$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos,

$$d) P_3 = \frac{mRT_3}{V_3} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (500 \text{ K})}{4 \text{ m}^3} = 520 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 520 \text{ kPa}$$

$$\text{Dado que } C_p = C_v + R, \text{ entonces: } C_v = C_p - R = 3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

La variación en la entropía del sistema para el proceso (2→3) está dada como:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) = mC_v \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + mR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = mC_v \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right)$$

$$e) \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln\left(\frac{500}{1000}\right) = -4.33 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred}) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-mC_v(T_3 - T_2)}{T_{alm}}; \text{ esto es que}$$

$$f) \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred}) = \frac{-(2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (500 - 1000) \text{ K}}{500 \text{ K}} = 6.24 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y la variación en la entropía del universo $\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) = \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred})$ resulta ser

$$g) \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) = (-4.33 + 6.24) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 1.91 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que la variación en la entropía del universo una cantidad positiva, concluimos que

h) el proceso (2→3) es irreversible.

Paso 3.

El sistema llega al estado 4, mediante una expansión libre adiabática en la que su volumen se duplica; esto es que:

$$a) \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred}) = 0, \quad b) V_4 = 2V_3 = 8 \text{ m}^3, \quad c) T_4 = T_3 = 500 \text{ K}$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$,

$$d) P_4 = \frac{mRT_4}{V_4} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (500 \text{ K})}{8 \text{ m}^3} = 260 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 260 \text{ kPa}$$

La variación en la entropía del sistema para el proceso (3→4) está dada como:

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) = mC_v \ln \left(\frac{T_4}{T_3} \right) + mR \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right) = mR \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right)$$

$$e) \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) = (2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{8}{4} \right) = 2.88 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que: $\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{univ}) = \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred})$; entonces

$$f) \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{univ}) = (2.88 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 2.88 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como la variación en la entropía del universo es positiva, concluimos que

g) el proceso (3→4) es irreversible

Paso 4.

Finalmente, sumando las correspondientes variaciones en la entropía del sistema, los alrededores y del universo, para cada uno de los tres procesos se obtiene la variación total en estas cantidades; esto es:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{sist}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist})$$

$$a) \Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{sist}) = (7.21 - 4.33 + 2.88) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 5.76 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{alred}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred})$$

$$b) \Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{alred}) = (-7.21 + 6.24 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -0.97 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{univ}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{univ})$$

$$c) \Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{univ}) = (0 + 1.91 + 2.88) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 4.79 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

				$\Delta S/\text{kJK}^{-1}$			
	P/kPa	V/m^3	T/K	Sistema	Alededores	Universo	Tipo de Proceso
1	1040	2	1a 500	1e 7.21	1f -7.21	0	1g reversible
2	1b 1040	1c 4	1d 1000	2e -4.33	2f 6.24	2g 1.91	2h irreversible
3	2d 520	2a 4	2b 500	3e 2.88	3a 0	3f 2.88	3g irreversible
4	3d 260	3b 8	3c 500	4a 5.76	4b -0.97	4c 4.79	

1 → 4

Problema 2.

Un sistema que consta de 2 kg de helio, inicialmente a 624 kPa y 2 m^3 experimenta los cambios que se describen a continuación:

1→2: expansión libre adiabática, triplicando su volumen;

2→3: el sistema se pone en contacto térmico (a volumen constante) con un almacén, cuya temperatura es el triple del valor de la temperatura inicial del sistema, hasta que ambos llegan al equilibrio.

3→4: el sistema adquiere el volumen inicial al efectuarse un cambio isotérmico.

Llenar la tabla indicando en la última columna si el proceso es reversible o irreversible.

	P/kPa	V/m^3	T/K	$\Delta S/\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$			Tipo de Proceso
				Sistema	Alrededores	Universo	
1							
2							
3							
4						0	
1→4							

Datos: $m = 2 \text{ kg}$, $R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$, $C_p = 5.20 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Paso 1.

Se conoce la presión y el volumen en el estado inicial, por lo que de la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ se determina la temperatura

$$a) \quad T_1 = \frac{P_1 V_1}{mR} = \frac{\left(624 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right) (2 \text{ m}^3)}{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)} = 300 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 300 \text{ K}$$

El sistema pasa del estado 1 al estado 2 mediante una expansión libre adiabática en la que su volumen se triplica; esto es que:

$$b) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} (\text{alred}) = 0, \quad c) \quad V_2 = 3V_1 = 6 \text{ m}^3, \quad d) \quad T_2 = T_1 = 300 \text{ K}$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos,

$$e) \quad P_2 = \frac{mRT_2}{V_2} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right) (300 \text{ K})}{6 \text{ m}^3} = 208 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 208 \text{ kPa}$$

La variación en la entropía del sistema para el proceso (1→2) está dada como

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} (sist) = m C_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + m R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = m R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$f) \Delta S_{1 \rightarrow 2} (sist) = (2 \text{ kg}) \left((2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}) \ln \left(\frac{6}{2} \right) \right) = 4.57 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como $\Delta S_{1 \rightarrow 2} (univ) = \Delta S_{1 \rightarrow 2} (sist) + \Delta S_{1 \rightarrow 2} (alred)$, entonces

$$g) \Delta S_{1 \rightarrow 2} (univ) = (4.57 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 4.57 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que la variación en la entropía del universo es positiva, concluimos que

h) el proceso (1→2) es irreversible

Paso 2.

El sistema pasa del estado 2 al 3, al ponerlo en contacto únicamente térmico con un almacén cuya temperatura es el triple de la temperatura inicial del sistema, hasta que ambos llegan al equilibrio; lo cual significa que

$$a) V_3 = V_2 = 6 \text{ m}^3, \quad b) T_3 = 3T_1 = 900 \text{ K}, \quad c) T_{alm} = T_3 = 900 \text{ K}$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ se obtiene que

$$d) P_3 = \frac{mRT_3}{V_3} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (900 \text{ K})}{6 \text{ m}^3} = 624 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 624 \text{ kPa}$$

$$\text{Dado que } C_p = C_v + R, \text{ entonces: } C_v = C_p - R = 3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

La variación en la entropía del sistema para el proceso (2→3) es

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} (sist) = m C_v \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) + m R \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) = m C_v \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right)$$

$$e) \Delta S_{2 \rightarrow 3} (sist) = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{900}{300} \right) = 6.86 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred}) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-mC_v(T_3 - T_2)}{T_{alm}}; \text{ esto es}$$

$$f) \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred}) = \frac{-(2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (900 - 300) \text{ K}}{900 \text{ K}} = -4.16 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y la variación en la entropía del universo $\Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) = \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred})$ resulta ser:

$$g) \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) = (6.86 - 4.16) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 2.70 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que la variación en la entropía del universo una cantidad positiva, concluimos que

h) el proceso (2→3) es irreversible.

Paso 3.

El sistema pasa del estado 3 al 4 mediante un cambio isotérmico, hasta adquirir el volumen inicial; esto significa que

$$a) T_4 = T_3 = 900 \text{ K}, \quad b) V_4 = V_1 = 2 \text{ m}^3$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos,

$$c) P_4 = \frac{mRT_4}{V_4} = \frac{(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (900 \text{ K})}{2 \text{ m}^3} = 1872 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 1872 \text{ kPa}$$

La variación en la entropía del sistema para este proceso está dada como

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) = mC_p \ln \left(\frac{T_4}{T_3} \right) - mR \ln \left(\frac{P_4}{P_3} \right) = -mR \ln \left(\frac{P_4}{P_3} \right)$$

$$d) \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) = -(2 \text{ kg}) \left(2.08 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{1872}{624} \right) = -4.57 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Se conoce para este proceso que $\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{univ}) = \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred}) = 0$, entonces

$$e) \quad \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred}) = -\Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist}) = -(-4.57) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 4.57 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como la variación en la entropía del universo es igual a cero, entonces:

f) el proceso (3→4) es reversible

Paso 4.

Finalmente, sumando las correspondientes variaciones en la entropía del sistema, los alrededores y del universo, para cada uno de los tres procesos se obtiene la variación total en estas cantidades; esto es:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{sist}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{sist}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{sist}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{sist})$$

$$a) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{sist}) = (4.57 + 6.86 - 4.57) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 6.86 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{alred}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{alred}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{alred}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{alred})$$

$$b) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{alred}) = (0 - 4.16 + 4.57) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.41 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{univ}) = \Delta S_{1 \rightarrow 2}(\text{univ}) + \Delta S_{2 \rightarrow 3}(\text{univ}) + \Delta S_{3 \rightarrow 4}(\text{univ})$$

$$c) \quad \Delta S_{1 \rightarrow 4}(\text{univ}) = (4.57 + 2.70 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 7.27 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

				$\Delta S/\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$			
	P/kPa	V/m^3	T/K	Sistema	Alrededores	Universo	Tipo de Proceso
1	624	2	300	1a			
2	1e 208	1c 6	300	1f 4.57	1b 0	1g 4.57	1h irreversible
3	2d 624	2a 6	900	2e 6.86	2f -4.16	2g 2.70	2h irreversible
4	3c 1872	3b 2	900	3d -4.57	3e 4.57	0	3f reversible
1→4				4a 6.86	4b 0.41	4c 7.27	

Problema 1.

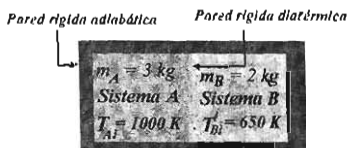
Los sistemas A y B constituidos por helio e ilustrados en la Figura intercambian calor, hasta llegar al equilibrio.

a) Indicar si el proceso de intercambio de calor es reversible o irreversible.

Una vez que los sistemas A y B han llegado al equilibrio, considere que el sistema compuesto ($A + B$) se pone en contacto térmico (a volumen constante) con un almacén a la temperatura de 1250 K hasta que ($A + B$) y el almacén térmico alcanzan el equilibrio.

b) Indicar si este segundo proceso es reversible o irreversible.

c) Calcular la variación total en la entropía del universo debida a los dos procesos.

**Primer proceso:**

Datos: $R = 2.08\text{ kJ/kgK}$, $C_V = 3.12\text{ kJ/kgK}$

Solución:

**Paso 1.**

De acuerdo con la Ley Cero cuando los sistemas A y B alcancen el estado final de equilibrio su temperatura debe ser la misma; esto es que $T_{Af} = T_{Bf} = T_f$. Para determinar esta temperatura final de equilibrio se procede de la siguiente manera:

Dado que los sistemas A y B están confinados en un recipiente de paredes rígidas adiabáticas, entonces no tienen interacción mecánica ni térmica con los alrededores, por lo que: $\Delta U = (\Delta U_A + \Delta U_B) = Q - W = 0$; de donde $\Delta U_A = -\Delta U_B$, es decir que

$$m_A C_{VA} (T_f - T_{Ai}) = -m_B C_{VB} (T_f - T_{Bi}); \text{ desarrollando esta ecuación:}$$

$$T_f (m_A C_{VA} + m_B C_{VB}) = m_A C_{VA} T_{Ai} + m_B C_{VB} T_{Bi}, \text{ se obtiene que}$$

$$T_f = \frac{m_A C_{VA} T_{Ai} + m_B C_{VB} T_{Bi}}{m_A C_{VA} + m_B C_{VB}}$$

pero como se trata del mismo gas, entonces $C_{VA} = C_{VB} = C_V$; por lo que la temperatura final de equilibrio es

$$a) \quad T_f = \frac{m_A T_{Ai} + m_B T_{Bi}}{m_A + m_B} = \frac{(3 \text{ kg})(1000 \text{ K}) + (2 \text{ kg})(650 \text{ K})}{(3 + 2) \text{ kg}} = 860 \text{ K}$$

Paso 2.

La variación en la entropía para el sistema A está dada como

$$\Delta S_A = m_A C_{VA} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Ai}} \right) + m_A R_A \ln \left(\frac{V_{Af}}{V_{Ai}} \right) = m_A C_{VA} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Ai}} \right) = m_A C_V \ln \left(\frac{T_f}{T_{Ai}} \right)$$

$$b) \quad \Delta S_A = (3 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{860}{1000} \right) = -1.41 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y para el sistema B

$$\Delta S_B = m_B C_{VB} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Bi}} \right) + m_B R_B \ln \left(\frac{V_{Bf}}{V_{Bi}} \right) = m_B C_{VB} \ln \left(\frac{T_f}{T_{Bi}} \right) = m_B C_V \ln \left(\frac{T_f}{T_{Bi}} \right)$$

$$c) \quad \Delta S_B = (2 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{860}{650} \right) = 1.75 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía para el sistema compuesto por A y B es

$$d) \quad \Delta S_{(A,B)} = \Delta S_A + \Delta S_B = (-1.41 + 1.75) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.34 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que los sistemas A y B no tienen interacción mecánica ni térmica con los alrededores, entonces: $\Delta S_{(alred)} = 0$

La variación en la entropía del universo está dada como:

$$e) \quad \Delta S_{(univ)} = \Delta S_{(A+B)} + \Delta S_{(atm)} = (0.34 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.34 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que la variación en la entropía del universo es una cantidad positiva, concluimos que este proceso de intercambio de energía calorífica solo entre los sistemas A y B es un

f) *proceso irreversible*

Segundo proceso:

Datos: $m = 5 \text{ kg}$, $R = 2.08 \text{ kJ/kgK}$, $C_V = 3.12 \text{ kJ/kgK}$

Solución:



Paso 1.

Para este segundo proceso el sistema es helio de masa igual a 5 kg a la temperatura inicial de 860 K ; el cual se pone en contacto únicamente térmico con un almacén cuya temperatura es $T_{alm} = 1250 \text{ K}$ hasta que llegan al equilibrio.

En este caso, dado que el almacén tiene la propiedad de mantener constante su temperatura, entonces en el estado final de equilibrio, la temperatura final del sistema es

$$a) \quad T_f = T_{alm} = 1250 \text{ K}$$

La variación en la entropía del sistema es

$$\Delta S_{i \rightarrow f} (sist) = mC_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = mC_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

$$b) \quad \Delta S_{i \rightarrow f} (sist) = (5 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{1250}{860} \right) = 5.83 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-mC_v(T_f - T_i)}{T_{alm}}; \text{ esto es}$$

$$c) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred}) = \frac{-(5 \text{ kg}) \left(3.12 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (1250 - 860) \text{ K}}{1250 \text{ K}} = -4.87 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía del universo $\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist}) + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})$ resulta ser

$$d) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ}) = (5.83 - 4.87) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.96 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que la variación en la entropía del universo es una cantidad positiva, concluimos que este proceso de intercambio de energía calorífica entre el sistema y el almacén térmico es

e) un proceso irreversible

Finalmente, la variación en la entropía del universo debida a los dos procesos es igual a la suma de las correspondientes variaciones obtenidas en cada caso por separado; esto es:

$$f) \quad \Delta S_{\text{TOTAL}}(\text{univ}) = (0.34 + 0.96) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 1.30 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Problema 2.

Un sistema realiza un ciclo para lo cual interactúa con dos almacenes térmicos a las temperaturas de 800 K y 650 K .

Si el sistema absorbe una determinada cantidad de calor del almacén a menor temperatura y cede 350 kJ de calor al almacén a 800 K , será necesario realizar un trabajo neto sobre el sistema.

Suponiendo que la energía se conserva, indicar en cada uno de los casos siguientes, si el ciclo es posible (reversible o irreversible) o imposible.

a) el sistema absorbe 769 kJ de calor _____,

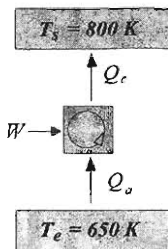
b) el trabajo neto que se suministra al sistema es de 120 kJ _____,

c) el almacén a menor temperatura cede 285 kJ de calor al sistema _____.

Datos generales: $T_s = 800\text{ K}$, $T_e = 650\text{ K}$, $Q_c = 350\text{ kJ}$

Solución:

a)



Datos: $Q_c = 769\text{ kJ}$

La Ley de conservación de la energía queda expresada como: $-W = Q_a - Q_c$; el trabajo es negativo porque se está suministrando al sistema.

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

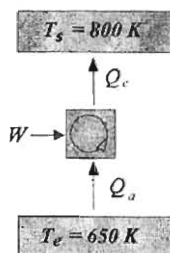
En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm\ T_s} + \Delta S_{alm\ T_e} = \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_a}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 + \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_a}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(\frac{350\text{ kJ}}{800\text{ K}} - \frac{769\text{ kJ}}{650\text{ K}} \right) = (0.44 - 1.18) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -0.74 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Como ΔS_{univ} es negativa, concluimos que el ciclo es: *imposible*

b)



Datos: $W = 120 \text{ kJ}$

La Ley de conservación de la energía establece que $-W = Q_o - Q_c$; el trabajo es negativo porque se está suministrando al sistema, entonces:

$$Q_o = Q_c - W = (350 - 120) \text{ kJ} = 230 \text{ kJ}$$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

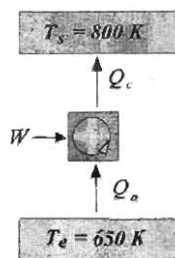
En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alm T_e} = \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_o}{T_e} ; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 + \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_o}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(\frac{350 \text{ kJ}}{800 \text{ K}} - \frac{230 \text{ kJ}}{650 \text{ K}} \right) = (0.44 - 0.35) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.09 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y como ΔS_{univ} es positiva, concluimos que el ciclo es: *posible irreversible*

c)



Datos: $Q_e = 285 \text{ kJ}$

La variación en la entropía del universo está dada como: $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{alred}$

En donde $\Delta S_{sist} = 0$ porque el sistema opera cíclicamente, y

$$\Delta S_{alred} = \Delta S_{alm T_s} + \Delta S_{alm T_e} = \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_e}{T_e}; \text{ de aquí que: } \Delta S_{univ} = 0 + \frac{Q_c}{T_s} - \frac{Q_e}{T_e}$$

$$\Delta S_{univ} = \left(\frac{350 \text{ kJ}}{800 \text{ K}} - \frac{285 \text{ kJ}}{650 \text{ K}} \right) = (0.44 - 0.44) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0$$

y como ΔS_{univ} es igual a cero, concluimos que el ciclo es: *posible reversible*

Problema 1.

Un sistema que consta de 3 kg de aire inicialmente a 172.2 kPa y 600 K, duplica su volumen debido a una expansión libre adiabática.

a) Determinar la variación en la entropía del universo debida a este cambio, b) indicar si el cambio es reversible o irreversible.

Considere ahora que, estando el sistema en el estado final que alcanzó en el cambio anterior; se pone en contacto térmico (a volumen constante) con un almacén, hasta que ambos llegan al equilibrio.

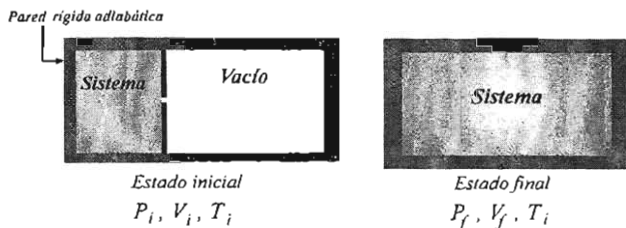
Suponiendo que en este segundo proceso la variación en la entropía del sistema es igual a la correspondiente variación en la entropía del universo debida al primer proceso descrito; determinar: c) la temperatura del almacén térmico, d) la presión que alcanza el sistema cuando llega al equilibrio, e) la variación en la entropía de los alrededores, f) la variación en la entropía del universo.

Finalmente, determinar para los dos procesos en conjunto: g) la variación total en la entropía de los alrededores y h) la variación total en la entropía del universo.

Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 0.287 \text{ kJ/kgK}$, $C_v = 0.717 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Primer proceso I:

**Paso 1.**

Se conoce la presión y la temperatura en el estado inicial, por lo que de la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ se determina el volumen en este estado,

$$a) \quad V_i = \frac{mRT_i}{P_i} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 \text{ K})}{\left(172.2 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right)} = 3 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}} = 3 \text{ m}^3$$

El sistema se encuentra inicialmente en el estado $(P_i, V_i, T_i) = (172.2 \text{ kPa}, 3 \text{ m}^3, 600 \text{ K})$ y se somete a una expansión libre adiabática duplicando su volumen; esto significa que:

$$b) T_f = T_i = 600 \text{ K} , \quad c) \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_i = 0 , \quad d) V_f = 2V_i = 6 \text{ m}^3$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$,

$$e) P_f = \frac{mRT_f}{V_f} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (600 \text{ K})}{6 \text{ m}^3} = 86.1 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 86.1 \text{ kPa}$$

El estado final del sistema queda dado como: $(P_f, V_f, T_f) = (86.1 \text{ kPa}, 6 \text{ m}^3, 600 \text{ K})$

La variación en la entropía del sistema para este primer proceso está dada como

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_i = mC_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

$$f) \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_i = (3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) \ln \left(\frac{6}{3} \right) = 0.597 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Para este proceso, $\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_i = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_i + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_i$,

$$g) \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_i = (0.597 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.597 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Dado que la variación en la entropía del universo es una cantidad positiva, concluimos que:

h) el primer proceso *I* es irreversible.

Solución:

Segundo proceso II:



Paso 2.

Estando el sistema en un estado caracterizado por las condiciones iniciales (86.1 kPa, 6 m³, 600 K) se pone en contacto, únicamente térmico, con un almacén hasta que ambos llegan al equilibrio. Nos indican que la variación en la entropía del sistema para este segundo proceso es igual a la variación en la entropía del universo debida al primer proceso analizado; esto es que

$$a) \quad V_f = V_i = 6 \text{ m}^3, \quad b) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_{II} = 0.597 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

Dado que la variación en la entropía del sistema para este proceso está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_{II} = mC_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + mR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = mC_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = 0.597 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

entonces, de esta ecuación calculamos la temperatura final alcanzada por el sistema en este segundo proceso; esto es

$$\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \frac{\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_{II}}{mC_v}; \quad \text{de donde:}$$

$$c) \quad T_f = T_i \exp\left(\frac{\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_{II}}{mC_v}\right) = (600 \text{ K}) \exp\left(\frac{0.597 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}}{(3 \text{ kg})\left(0.717 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)}\right) = 791.93 \text{ K}$$

En el estado final de equilibrio, el almacén y el sistema deben tener la misma temperatura, concluimos entonces que

$$d) \quad T_{alm} = T_f = 791.93 \text{ K}$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ resulta que,

$$e) \quad P_f = \frac{mRT_f}{V_f} = \frac{(3 \text{ kg})\left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)(791.93 \text{ K})}{6 \text{ m}^3} = 113.64 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 113.64 \text{ kPa}$$

El estado final queda caracterizado como $(P_f, V_f, T_f) = (113.64 \text{ kPa}, 6 \text{ m}^3, 791.93 \text{ K})$

La variación en la entropía de los alrededores, es decir la variación en la entropía del almacén térmico está dada como:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{II} = \frac{Q_{alm}}{T_{alm}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-\Delta U_{sist}}{T_{alm}} = \frac{-mC_v(T_f - T_i)}{T_{alm}}; \text{ esto es}$$

$$f) \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{II} = \frac{-(3 \text{ kg}) \left(0.717 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (791.93 - 600) \text{ K}}{791.93 \text{ K}} = -0.521 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación en la entropía del universo para el segundo proceso se determina mediante la suma $\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_{II} = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_{II} + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{II}$; esto es

$$g) \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_{II} = (0.597 - 0.521) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.076 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Paso 3.

Finalmente, considerando los dos procesos en conjunto:

La variación total en la entropía de los alrededores se obtiene sumando las correspondientes variaciones debidas a cada uno de los procesos, esto es:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{TOTAL} = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_I + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{II}$$

$$a) \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{TOTAL} = (0 - 0.521) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -0.521 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

en tanto que la variación total en la entropía del universo la obtenemos sumando las correspondientes variaciones debidas a cada uno de los procesos, esto es:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_{TOTAL} = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_I + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_{II}$$

$$b) \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_{TOTAL} = (0.597 + 0.076) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.673 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Problema 2.

Un sistema que consta de 3 kg de aire inicialmente a 172.2 kPa y 3 m³ aumenta su temperatura en 200 K debido a una compresión isentrópica.

Determinar las variaciones en entropía: a) del sistema, b) los alrededores, c) del universo.

Considere ahora que, estando el sistema en el estado final que alcanzó en el cambio anterior; experimenta una expansión libre adiabática.

Si en este segundo proceso la variación en la entropía del universo es igual a 0.34 kJ/K; determinar: d) el volumen final, e) la presión final, y f) la variación en la entropía del sistema.

Finalmente, determinar para los dos procesos en conjunto las variaciones totales en entropía: g) del sistema, h) los alrededores, i) el universo.

Datos: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 0.287 \text{ kJ/kgK}$, $C_v = 0.717 \text{ kJ/kgK}$

Solución:

Primer proceso I:

Paso 1.

Se conoce la presión y el volumen en el estado inicial, por lo que de la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos

$$a) \quad T_i = \frac{P_i V_i}{mR} = \frac{\left(172.2 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\right) (3 \text{ m}^3)}{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right)} = 600 \frac{\text{kJ}}{\frac{\text{kJ}}{\text{K}}} = 600 \text{ K}$$

El sistema se encuentra inicialmente en el estado caracterizado por: $(P, V, T_i) = (172.2 \text{ kPa}, 3 \text{ m}^3, 600 \text{ K})$ y mediante una compresión isentrópica aumenta su temperatura en 200 K; esto significa que

$$b) \quad \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_i = 0 = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_i = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_i, \quad c) \quad \text{el proceso es reversible}$$

$$d) \quad \Delta T_{i \rightarrow f} = T_f - T_i = 200 \text{ K}, \text{ de donde:}$$

$$e) \quad T_f = T_i + \Delta T_{i \rightarrow f} = (600 + 200) \text{ K} = 800 \text{ K}$$

De la ecuación de la variación en la entropía del sistema para este proceso calculamos el volumen final:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_i = mC_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = 0; \text{ esto es: } mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = -mC_v \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right);$$

Así que $\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \left(-\frac{C_v}{R}\right) \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)^{-C_v/R}$; de donde: $\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \left(\frac{T_f}{T_i}\right)^{-C_v/R}$

$$f) V_f = V_i \left(\frac{T_f}{T_i}\right)^{-(C_v/R)} = (3 \text{ m}^3) \left(\frac{800}{600}\right)^{-(0.717/0.287)} = 1.46 \text{ m}^3$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ se obtiene que

$$g) P_f = \frac{mRT_f}{V_f} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}\right) (800 \text{ K})}{(1.46 \text{ m}^3)} = 471.78 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 471.78 \text{ kPa}$$

El estado final del sistema queda dado como:

$$(P_f, V_f, T_f) = (471.78 \text{ kPa}, 1.46 \text{ m}^3, 800 \text{ K})$$

Solución:

Segundo proceso II:

Paso 2.

El sistema parte del estado inicial caracterizado por:

$(P_i, V_i, T_i) = (471.78 \text{ kPa}, 1.46 \text{ m}^3, 800 \text{ K})$ y experimenta una expansión libre adiabática en la que la variación en la entropía del universo es igual a 0.34 kJ/K ; todo esto significa que:

$$a) T_f = T_i = 800 \text{ K}, \quad b) \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{II} = 0, \quad c) \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_{II} = 0.34 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

y dado que:

$$\Delta S_{i \rightarrow f}(\text{univ})_{II} = \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_{II} + \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{alred})_{II} = 0.34 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}, \text{ entonces}$$

$$d) \Delta S_{i \rightarrow f}(\text{sist})_{II} = 0.34 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Conocida la variación en la entropía del sistema para este proceso calculamos el volumen final de la ecuación

$$\Delta S_{i \rightarrow f} (sist)_II = mC_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = 0.34 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} ; \text{ esto es:}$$

$$mR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = \Delta S_{i \rightarrow f} (sist)_II ; \text{ así que: } \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = \frac{\Delta S_{i \rightarrow f} (sist)_II}{mR} , \text{ de donde:}$$

$$e) \quad V_f = V_i \exp \left(\frac{\Delta S_{i \rightarrow f} (sist)_II}{mR} \right) = (1.46 \text{ m}^3) \exp \left(\frac{0.34 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}}{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)} \right) = 2.17 \text{ m}^3$$

De la ecuación de estado de gas ideal $PV = mRT$ determinamos la presión final del sistema en este segundo proceso,

$$f) \quad P_f = \frac{mRT_f}{V_f} = \frac{(3 \text{ kg}) \left(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right) (800 \text{ K})}{(2.17 \text{ m}^3)} = 317.42 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} = 317.42 \text{ kPa}$$

Paso 3.

Finalmente, considerando los dos procesos en conjunto: las variaciones totales en la entropía del sistema, los alrededores y del universo se obtienen sumando las correspondientes variaciones debidas a cada uno de los procesos, esto es

$$g) \quad \Delta S_{i \rightarrow f} (sist)_{TOTAL} = \Delta S_{i \rightarrow f} (sist)_I + \Delta S_{i \rightarrow f} (sist)_II = (0 + 0.34) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.34 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$h) \quad \Delta S_{i \rightarrow f} (alred)_{TOTAL} = \Delta S_{i \rightarrow f} (alred)_I + \Delta S_{i \rightarrow f} (alred)_{II} = (0 + 0) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0$$

$$i) \quad \Delta S_{i \rightarrow f} (univ)_{TOTAL} = \Delta S_{i \rightarrow f} (univ)_I + \Delta S_{i \rightarrow f} (univ)_{II} = (0 + 0.34) \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = 0.34 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

APÉNDICE I

PROPIEDADES DE ALGUNOS GASES IDEALES

Gas	Fórmula Química	Peso Molecular	$R \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right]$	$C_p \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right]$	$C_v \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right]$	$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \gamma$
Aire	-----	28.970	0.28700	1.0035	0.7165	1.400
Argón	Ar	39.948	0.20813	0.5203	0.3122	1.667
Butano	C ₄ H ₁₀	58.124	0.14304	1.7164	1.5734	1.091
Carbono, Bióxido	CO ₂	44.010	0.18892	0.8418	0.6529	1.289
Carbono, Monóxido	CO	28.010	0.29683	1.0413	0.7445	1.4000
Etano	C ₂ H ₆	30.070	0.27650	1.7662	1.4897	1.186
Etileno	C ₂ H ₄	28.054	0.29637	1.5482	1.2518	1.237
Helio	He	4.003	2.07703	5.1926	3.1156	1.667
Hidrógeno	H	2.016	4.12418	14.2091	10.0849	1.409
Metano	CH ₄	16.040	0.51835	2.2537	1.7354	1.299
Neón	Ne	20.083	0.41195	1.0299	0.6179	1.667
Nitrógeno	N ₂	28.013	0.29680	1.0416	0.7448	1.400
Octano	C ₈ H ₁₈	114.230	0.07279	1.7113	1.6385	1.044
Oxígeno	O ₂	31.999	0.25983	0.9216	0.6618	1.393
Propano	C ₃ H ₈	44.097	0.18855	1.6794	1.4909	1.126
Vapor	H ₂ O	18.015	0.46152	1.8723	1.4108	1.327

Nota: C_p , C_v y γ están dadas a 300 K

Fuente: G. J. Van Wylen, R. E. Sonntag
Fundamentos de Termodinámica Clásica
Edit. LIMUSA, 2005

Bibliografía

1. Termodinámica
Francisco Medina Nicolau, Matilde Eva Espinosa Rubio y Luz María García Cruz
Ed. División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Ciencias Básicas
Universidad Autónoma Metropolitana- Azcapotzalco, 2006.
2. Física Universitaria
F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young y R. A. Freedman
Ed. Pearson – Addison Wesley
Volumen 1, Décimo primera edición, 2004.
3. Física
R. Resnick, D. Halliday y K. Krane
Ed. CECSA
Volumen 1, Quinta edición, 2004.
4. Fundamentos de Termodinámica Clásica
G. J. Van Wylen y R. E. Sonntag
Edit. LIMUSA, 2005.
5. Introducción a la Termodinámica Clásica
Leopoldo García-Colín Scherer
Edit. Trillas
Cuarta edición, 1989.
6. Problemario de Termodinámica Clásica
Leopoldo García-Colín Scherer y Luis Ponce Ramírez
Edit. Trillas
Segunda edición, primera reimpresión, 1991.

ELEMENTOS DE TERMODINÁMICA

**SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EN EL MES DE
ABRIL DE 2010 EN LOS TALLERES DE LA SECCIÓN
DE IMPRESIÓN Y REPRODUCCIÓN DE LA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO**

**SE IMPRIMIERON 1.000 EJEMPLARES
MÁS SOBRANTES PARA REPOSICIÓN**

**LA EDICIÓN ESTUVO A CARGO DE LA
SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES
DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO**

2893209
Elementos de termodinàmic

ELEMENTOS DE TERMODINAMICA

GARCIA CRUZ

* SECCION DE IMPRESION

64513

R. 40



\$ 55.00

40-ANTOLOGIAS CBI

* 01-CBI

ISBN: 970-31-2041-7



978-97031-20413

UNIVERSIDAD
AUTONOMA
METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo



Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas
Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales